

第 6 回和田杯

灘校数学研究部

第 73 回文化祭 (2019 年 5 月 2 日～3 日)

入試模試の数学版として発足したこの企画も 6 回目となり、恒例企画となりつつあります。基本的に高校で習う程度の数学の知識で解答可能です。制限時間は文化祭が終わるまでの 2 日間、じっくり考え抜いていただくと幸いです。問題に関する質問はお気軽に受付までどうぞ。答案を書いたくださった方は、受付までお持ちいただくか、裏面記載のメールアドレスあるいは Twitter アカウトに答案の写真を送っていただければ正誤判定いたします。

注意：問題の並び順は難易度とは無関係です！

1. 中心を w , 半径を r とする円 C が複素平面上にある. 3 種類以上の複素数からなり 0 を含まない C 上の無限点列 $\{c_n\}$ について, $a_n = c_1 \cdots c_n$ とおくと, 任意の正整数 n に対し $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ が成り立つ実数 p, q が存在した. このとき, p, q としてありえる値を w, r を用いて表せ.

2. $n \geq 2$ を整数とする. どの二つも互いに相異なる n 個の実数 a_1, \dots, a_n が

$$S = a_1 + \frac{1}{a_2} = a_2 + \frac{1}{a_3} = \cdots = a_n + \frac{1}{a_1}$$

をみたすとき, S としてとり得る値は高々 $n - 1$ 個であることを示せ.

3. 六角形 $ABCDEF$ が円に内接している. 三角形 FAB, ABC, \dots, EFA の内接円を $\omega_A, \omega_B, \dots, \omega_F$ とし, ω_A と ω_B の直線 AB でない方の共通外接線を l_{AB} , 同様に $l_{BC}, l_{CD}, l_{DE}, l_{EF}, l_{FA}$ を定める. また l_{FA} と l_{AB} の交点を A_1 とし, 同様に B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 を定める.

六角形 $ABCDEF$ が内接円を持つとき, 直線 A_1D_1, B_1E_1, C_1F_1 は一点で交わることを示せ.

4. 整数 $n \geq 2$ に対し $F_n = 2^{2^n} + 1$ が素数であるとする (これをフェルマー素数と呼ぶ).
いま F_n の逆数を十進小数展開し, その循環節を考える.

(1) 循環節の長さを求めよ.

(2) 一つの循環節における各桁の数字の総和を求めよ.

5. 有理数に対して定義され実数値をとる関数 f であって, 任意の有理数 x, y に対して

$$f(x+y)(f(x+y) + 2f(x)) = f(y) \left(f(x+1)^2 + f\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 \right)$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.

6. 魔剤村の灘小学校には 2019 人の男子生徒と 1927 人の女子生徒が在籍している. 校長であるバンジー先生は, 学校の生徒について以下が成り立つことに気付いた.

- どの 2 人の生徒も互いに友人であるかそうでないかのいずれかである.
- どの 2 人の男子生徒についても, その共通の友人である女子生徒は偶数人である.
- 奇数人の女子生徒を友人にもつ男子生徒はちょうど 111 人である.

このとき, 以下の条件をみたすようにさんすうクラブを作れることを示せ.

- クラブには 999 人以上の男子生徒が属する.
- どの女子生徒についても, クラブに属する男子生徒のうち友人は偶数人である.

(余談: 本校は 1927 年に創立されました.)

7. 正四面体 $ABCD$ と空間内の任意の 2 点 M, N について,

$$MA \cdot NA + MB \cdot NB + MC \cdot NC \geq MD \cdot ND$$

を示せ.

8. n を正の整数とする. 魔剤村の灘小学校の 1 年 1 組には n 人の生徒が在籍しており, 1 から n までの出席番号がそれぞれの生徒につけられている. 今日はたのしい遠足なので, 担任であるバンジー先生は n 人の生徒を 1 列に並べさせたい. ただし生徒の親睦を深めるため以下の条件を満たすようにする.

- 出席番号が連続する 2 人は順に前後に並ばない.

例えば $n = 3$ のとき $(1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1)$ が条件をみたす.

このような n 人の並び方の場合の数を $f(n)$ とおくと, 以下の極限值を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n!}$$

9. 正の実数 a, b, c, d が $a + b + c + d = 1$ をみたすとき,

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 64abcd \geq 1$$

を示せ.

10. $AB \neq AC$ なる三角形 ABC について, その外接円を Γ , 辺 BC の中点を M とする. AM を直径とする円と Γ の A でない方の交点を A' とし, A' から直線 AB, AC におろした垂線の足をそれぞれ D, E とする. M を通り AO に平行な直線は DE の中点を通ることを示せ.

11. n を正の整数とする. $n + 1$ 個の二項係数 ${}_nC_0, {}_nC_1, \dots, {}_nC_n$ のうち, 3 で割って 1 余るものの個数を A_n , 3 で割って 2 余るものの個数を B_n とおく.

このとき, $A_n - B_n$ は n の値によらず 2 べきであることを示せ.

作問ありがとう！

1. 黒木 2. 平山 3. 平山 4. 平山 5. 若杉 6. 平山 7. 平山 8. 平山 9. 平山 10. 平山 11. 平山

生徒時代に数研に在籍していらっしやった和田孫博校長先生のお名前を冠して始まった本企画も、今年で6回目を迎えることとなりました。当初は「入試模試の数学版」と銘打っておりましたが、今となっては入試模試と張り合える有名企画になりつつあるかなと思います。

さて、昨年まで2回にわたりこの企画を担当されてきた黒田先輩が卒業され、わたくし平山が引き継ぐこととなりました。直近2年の和田杯は提案される問題の不足にあえぎ、黒田先輩が苦心してほとんどの問題を作る状況が続いていました。しかし残念ながら今年も改善は見られませんでした。なんとか今年も第6回をお届けできたとはいえ、今後の企画の存続が危ぶまれる状況に変わりはありません。部員(特に後輩)各位においては来年に期待します。

答案の正誤判定については1ページ目にお書きした通りですが、今回の和田杯もオンラインでの参加を受け付けております。特にTwitter上では例年たくさんの方々にご解いていただき、こちらも非常にありがたい限りです。文化祭に来場できないという皆様も是非ご参加ください。

なお文化祭後でも正誤判定は受け付けますが、コンテストとしての都合上なるべく文化祭期間中をお願いいたします。参加者数は多い方が嬉しいので、一問でも解けた方はお気軽に答案を我々にお見せください。一人でも多くの皆様のご参加を心待ちにしています。

それでは！ Good Luck！

- 答案郵送先(返信用の切手を同封してください)：
〒658-0082 神戸市東灘区魚崎北町 8-5-1 灘校数学研究部
- 数研メールアドレス：nada.math.club@gmail.com
- Twitter アカウント：[@nada_mathclub](https://twitter.com/nada_mathclub)
- 数研 HP：<http://nada-mathclub.jimbo.com>

文責 高校2年 平山楓馬