第 5 回和田杯

灘校数学研究部

第 72 回文化祭 (2018 年 5 月 2 日〜3 日)

入試模試の数学版として発足したこの企画も 5 回目となり，恒例企画となりつつあります!! すべて高校で習う程度の数学の知識で全問解答可能です! 制限時間は文化祭が終わるまでの 2 日間, じっくり考え抜いていただけたら幸いです. 問題に関する質問はお気軽に受付までどうぞ. 答案を書いてくださった方は, 受付までお持ち頂くか, 裏面記載のメールアドレスあるいは Twitter アカウントに答案の写真を撮って画像を送って頂ければ正誤判定いたします.

1. $AB \neq AC$ なる鋭角三角形 ABC について, A, B, C からそれぞれの対辺への垂線の足を D, E, F とし, 垂心を H とする. 辺 BC の中点を M とし, 線分 AM と, 三角形 BCH の外接円の交点を N とする. 直線 HM と三角形 ADN の外接円の交点のうちの一つを, 点 X とする.

この時, 三角形 XBC の外接円と三角形 XEF の外接円は, 互いに接することを示せ.

2. 正整数 n に対し, $S = \{(x, y) | 1 \leqq x \leqq n, 1 \leqq y \leqq n, x, y \text{ は整数 } \}$ という, n^2 個の要素からなる集合を考える. この S の部分集合 T が**美しい集合**であるとは, T の要素数が n であり, $\{x|$ ある整数 y に対し, $(x, y) \in T\}$, $\{y|$ ある整数 x に対し, $(x, y) \in T\}$ それぞれが, $\{1\}, \{2\}, \cdots, \{n\}, \{1, 2, \cdots, n\}$ のいずれかになっているものを言う. (例えば, $n = 3$ の時, $\{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ は美しい集合である.)

この時, 次の条件を満たす正整数 k の最小値を求めよ.

· k 個の要素からなる S の任意の部分集合は, 必ず美しい集合を部分集合として持つ.

3. 正整数に対して定義され正整数値を取る関数 f であって, $m > n$ かつ $f(m^2) - nf(m) \neq 0$ を満たすような任意の正整数 m, n に対して,

$$\frac{mf(m-n)}{f(m^2)-nf(m)}$$

が正整数になるようなものを全て求めよ.

4. 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ に対し, その空集合でない部分集合 A, B があって, $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \phi$ を満たしている. さらに, 任意の有理数 $a, b \in A$, $c, d \in B$ に対し, $\frac{a+b}{2} \in A$, $\frac{c+d}{2} \in B$, を満たしているとする. この時, ある実数 x があって, A は, $\{p | p < x, p \in \mathbb{Q}\}, \{p | p > x, p \in \mathbb{Q}\}, \{p | p \leqq x, p \in \mathbb{Q}\}, \{p | p \geqq x, p \in \mathbb{Q}\}$ のいずれかの形で表せることを示せ.

5. どの辺の長さも異なる鋭角三角形 ABC があり, その外接円, 外心をそれぞれ Γ, O とする. 辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ M_a, M_b, M_c とする. $D_aM_b : D_aM_c = AM_b : AM_c$ を満たすような, Γ 上にあり, 点 A と異なるような点 D_a をとる. 直線 AO と Γ, 辺 BC との交点を $X_a (\neq A), Y_a$ とする. 三角形 $D_aX_aY_a$ の外接円と辺 BC との交点のうち, 点 Y_a でないものを点 Z_a とする. 同様にして, X_b, X_c, Z_b, Z_c を定義する. この時, 三角形 AX_aZ_a, 三角形 BX_bZ_b, 三角形 CX_cZ_c の各外接円は, 全てある 2 点 E, F を通ることを示せ.

6. 魔剤村には 2018 軒の家があり, それぞれの家からは他の 5 軒の家に向かって道路が敷かれている. ただし道路は互いに交差しないとする.

魔剤村の村長選に立候補したバンジィ候補は, 道路に沿って進み, 家の前を通ったときその家を訪問するとして, すべての家を丁度 1 回ずつ戸別訪問して選挙活動を行いたい. この時, 2018 軒のうち自分の家から出発し, 自分の家から直接道路がつながっている, 投票所となってる家を最後に訪れるようにする. この時, この戸別訪問の回り方は偶数通り (0 通りを含む) であることを示せ.

7. ガウス整数を係数にもつ多項式 $f(x)$ がある. あるガウス整数 z について, 正の整数 m があって, $f^m(z) = z$ を満たしているとする. (ただし, m は, この式を満たすもののうち最小のものである.) この時, m としてありうる値を全て求めよ.

ただし,$f^k(n)$ で $\underbrace{f(f(\cdots f}_{k\text{ 個}}(n)\cdots))$ を表すものとする.

注. ガウス整数とは, 実部と虚部がともに整数であるような複素数, つまり, 整数 a, b を用いて $a + bi$ と書けるものをいう.

8. 0 より大きく 1 より小さい実数について定義され, 0 より大きく 1 より小さい実数値をとる関数 f であって, $x+y+z=1$ かつ $0<x,y,z<1$ を満たすような任意の実数 x,y,z に対し

$$f(x)^2+f(y)^2+f(z)^2+2f(x)f(y)f(z)=1$$

を満たすようなものを全て求めよ.

9. $AB<AC$ なる, $\angle A=90°$ の三角形 ABC がある. 直線 BC 上に, C と異なる点 D で $AC=AD$ となるようなものをとる. 中心が B であり, 点 D を通る円と, 三角形 ABC の外接円の交点のうち, 直線 BC に関して A と逆側にあるものを E とする. 直線 CE 上に, $\angle CBF=90°$ となるような点 F をとる. 線分 DE の中点を G とする. この時, $\angle BDF=\angle BGC$ となることを示せ.

10. 正整数 n がある. バンジー君が, 0 以上 1 以下の実数を無作為に, 順に n 個選ぶ過程で, 黒板を使った遊びを行う. まず始めに, バンジー君は, 0 以上 1 以下の実数を無作為に選び, その数を黒板に書く. その後, 黒板に書かれている数より大きな数を選んだ場合, 黒板に書かれた数を, 選んだ数に書き換え, それ以外の場合は何もしないという操作を行う.

この時, バンジー君が黒板に数を書く回数の期待値を, n を使って表せ. (ここでカウントされるのは, 最初に黒板に書く操作と, その後書き換える操作である. 例えば, $n=1$ の場合は求める値は 1 となり, $n=2$ の場合は求める値は $\frac{3}{2}$ となる.)

11. n を正整数とする. $S=\{1,2,\cdots n\}$ とおく. S 上で定義され S に値をとる関数 f であって, 任意の S の要素 m に対して,

$$f^{f(m)}(m)=n+1-m$$

を満たすようなものがあるとする.

この時, n が奇数であることを示せ.

ただし,$f^k(n)$ で $\underbrace{f(f(\cdots f}_{k\text{ 個}}(n)\cdots))$ を表すものとする.

作問ありがとう!!

1. 黒田 2. 黒田 3. 大上 4. 黒田 5. 黒田 6. 平山 7. 黒田 8. 平山 9. 黒田 10. 黒田 11. 黒田

生徒時代に数研に在籍していらっしゃった和田孫博校長先生のお名前をいただいて豪華に始まった本企画も, 今年で5回目を迎えることになりました. 当初は「入試模試の数学版」と銘打っておりましたが, この企画も広まり, 入試模試と張り合える名門企画に近づいてきたかな? と思います (もちろん難易度含めですよ!)

さて, 私は和田杯の責任者を去年も務め, 今年で2回目となりました. 去年と比べると, 個人的には難しく, 質の高い問題になったのではないかなと思います (私の自己満足的な面も否めませんが). ただ, 問題集めはかなり苦心しました. 締め切りの日が近づいてもほとんど問題が集まらず, 結局私の作っていた候補問題を全て盛り込むことになりました. 私は高3なので, 和田杯の責任者を務めるのは今回で最後ですが, 来年以降この企画がきちんと機能するのかは心配なところがあります. その点については次の責任者にきちんと伝え, 来年以降はバラエティの富んだ問題にしたいと思います. 来年以降も和田杯をご贔屓に, どうぞよろしくお願いします.

話は変わりますが, 去年と同じように, 今回の和田杯も, インターネットを通したコンテスト化を計画しています. これは, 来場者の方々で和田杯を解いてくれた方がこちらの想定より少なく, また逆に Twitter 上で思いの外多くの方々が解いてくれたことを受けて始まったものなのですが, 下記に記載しているメールアドレスまたは Twitter アカウントに答案を送ってくだされば, 正誤判定いたします. こちらもドキドキして待っております.

答案の正誤判定については1ページ目にお書きした通りです. 文化祭後でも郵送にて正誤判定は受け付けますが, コンテストとしての都合上なるべく文化祭期間中にお願いいたします. 参加者数は多い方が嬉しいので, 1問でも解けた方はお気軽に答案を我々にお見せください. 1人でも多くの方々の参加を心待ちにしています.

それでは! Good Luck!

· 答案郵送先 (返信用の切手を同封してください):
〒658-0082 神戸市東灘区魚崎北町 8-5-1 灘校数学研究部
数研メールアドレス:suken114810@gmail.com
Twitter アカウント:nada_mathclub
· 数研 HP です.
http://nada-mathclub.jimbo.com

文責　高校3年　黒田直樹