

第4回和田杯

灘校数学研究部

第71回文化祭(2017年5月2日~3日)

入試模試の数学版として発足したこの企画も4回目になり、恒例企画となりつつあります!!すべて高校で習う程度の数学の知識で全問解答可能です!制限時間は文化祭が終わるまでの2日間、じっくり考え抜いていただけたら幸いです。問題に関する質問はお気軽に受付までどうぞ。答案を書いてくださった方は、受付までお持ちいただくか、裏面記載のメールアドレスあるいはTwitterアカウントに答案の写真を撮って画像を送っていただければ正誤判定いたします。成績上位の方は(ご本人の許可がいただければ)後日、尊敬と感謝の念を込めてホームページでの発表を予定しております。

1. 実数 a, b について、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = |x^5 + ax^4 + bx^3|$$

で定める、 x が $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で全実数値を取りうるときの $f(x)$ の最大値を実数 a, b に対して、 $M(a, b)$ と定めるとき、 $M(a, b)$ の最小値と、その値を与える (a, b) を求めよ。

2. 実数について定義され実数値をとる関数 f であって、任意の実数 x, y に対して

$$f(xf(y) + f(x)) + y = f(x)f(f(y))$$

が成り立つものをすべて求めよ。

3. 正の実数 a_1, a_2, \dots, a_n について、

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sqrt[k]{\left(\frac{a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k}{n}\right)}$$

の値を求めよ。

4. 正の整数 n に対し、 xy 平面上で、 x 座標、 y 座標がともに 1 以上 n 以下の格子点全ての集合を A とおく。(この時 A の元の数 n^2 である) A の部分集合 S が良い集合とは、 S の元のどの4点

をとっても, その4点を頂点とする四角形が単位格子と平行な辺を持つ長方形にならない時にいうことにする.

a. $n\sqrt{n} + \frac{n}{2}$ 以上の点を含む良い集合は存在しないことを示せ.

b. $n[\sqrt{n}]$ 個の点を含む良い集合が, 任意の n に対し必ず存在することを示せ.

5. 0 から $10^{2N} - 1$ の 10^{2N} 個の整数をいくつかのグループに分けた所, 全てのグループは次の P, Q, R のいずれかの条件を満たしており, R の条件を満たすグループは一つのみだった.

P ab 個の数によって構成されており, グループ内の数の上 N 桁として出てくる数は a 種類でその a 個の数は連続している. 同様に, グループ内の数の下 N 桁として出てくる数は b 種類でその b 個の数は連続している.

Q ab 個の数によって構成されており, グループ内の数の上 N 桁として出てくる数は b 種類でその b 個の数は連続している. 同様に, グループ内の数の下 N 桁として出てくる数は a 種類でその a 個の数は連続している.

R 10^N 個の数から構成されて, どの2数についても上 N 桁同士, 下 N 桁同士が両方異なる.

正の整数の組 (a, b) に対し, このようなグループ分けが可能な正の整数 N が, 全てそのような N の最小値の倍数であるような (a, b) を求めよ.

(ただし, x の上 N 桁は $[\frac{x}{10^N}]$, 下 N 桁は $x - [\frac{x}{10^N}] \cdot 10^N$ とする.)

6. 三角形 ABC について, 三角形 ABC の外接円を Γ とする. D, E をそれぞれ $\angle A$ の二等分線と点 B を通り AB に垂直な直線の交点, $\angle A$ の二等分線と点 C を通り AC に垂直な直線の交点とし, F, G をそれぞれ Γ と点 B を通り $\angle A$ の二等分線に平行な直線の交点, Γ と点 C を通り $\angle A$ の二等分線に平行な直線の交点とする.

(ただし, 点 B を通り $\angle A$ の二等分線に平行な直線が Γ に接する場合は $F = B$ とする. 同様に点 C を通り $\angle A$ の二等分線に平行な直線が Γ に接する場合は $G = C$ とする.)

この時, 直線 DG と直線 EF は Γ 上で交わることを示せ.

7. 三角形 ABC について, その内部に点 P をとる. 辺 AB を B 側に延長し, それ上に点 X をとり, 辺 BC を C 側に延長し, それ上に点 Y をとる. 辺 BC と直線 PX , 直線 PY との交点をそれぞれ E, D とする. 三角形 BDP の外接円と三角形 CEP の外接円の交点のうち P でない方を Q とする. この時, A, P, Q が同一直線上にあることと $BC \parallel XY$ であることは同値であることを示せ.

8. $\tan \theta$ を整数とする. $(\tan^m \theta + \cos n\theta) \div \cos^n \theta = 2016$ を満たす正の整数 m, n と $\tan \theta$ の組を全て求めよ.

9. どの二辺の長さも異なる三角形 ABC について, 三角形 ABC の外接円を Γ とし, 外心を O とする. D, E, F を, それぞれ A を通り BC に平行な直線と Γ, B を通り CA に平行な直線と Γ, C を通り AB に平行な直線と Γ の交点とする. 三角形 DEO の外接円と三角形 CFO の外接円の交点のうち O でない方を G とする. この時, 三角形 CEO の外接円と三角形 EFG の外接円は互いに接することを示せ.

10. 正の整数 n と素数 p について,

$$\binom{p^{n+1}}{p^n} - p$$

が p で割れる最大回数を $f(p, n)$ で表す.

- a. $p = 2$ の時, 任意の正の整数 n に対し $f(p, n) = 2$ が成り立つことを示せ.
- b. $p = 3$ の時, 任意の正の整数 n に対し $f(p, n) = 4$ が成り立つことを示せ.
- c. p が 5 以上の素数の時, 任意の正の整数 n に対し $f(p, n) \geq 5$ が成り立つことを示せ.

(但し, 正の整数 m, n に対し, $\binom{m}{n} = m(m-1)\cdots(m-n+1)$ とする.)

11. カード数当てゲームは, 3 人のプレイヤー A, B, C によって行われるゲームである. このゲームのルールは, あらかじめ全てのプレイヤーに知らされている正の整数 k, n に依存する, ゲームが始まる前に B, C はゲームの内容について相談し, その上でゲームに臨む. まず, ゲームが始まる前に, C は場から離れ, A と B のみがある場にいる. ゲームの開始時に, A は $1 \leq x \leq n$ を満たす正の整数 x を選び, 1, 2, 3 の数字が書かれたカードから k 枚を選び, 左から並べる. A は x を B に伝える. その後, B は, 以前に C と相談した内容をもとに, A が並べたカード k 枚のうち 1 枚を選び, その 1 枚を, 1, 2, 3 のうちそのカードに書かれていた数字でない 2 つの数が書かれたカードに置き換える. (例えば, 1 が書かれたカードを, 2 か 3 が書かれたカードに置き換えることとする.) その後, C がその場に来て, そこに置かれたカード k 枚の中身と並んでいる順番から判断し, ある一つの数を指定する. その数が x であれば B, C の勝ち, その数が x でなければ A の勝ちとする.

- a. $n \geq 2k$ の時, B, C が確実に勝つことは不可能であることを示せ.
- b. $n = 2k - 1$ の時に, B, C が確実に勝つことが出来るような正の整数 k, n の組が無数に存在することを示せ.

作問者 (協力ありがとう!)

1. 黒木 2. 竹下 3. 黒田 4. 黒田 5. 大上 6. 黒田 7. 黒田 8. 上村 9. 黒田 10. 黒田 11. 黒田

生徒時代に数研に在籍していらしゃった和田孫博校長先生のお名前をいただいて豪華に始まった本企画も、今年で4回目を迎えることになりました。当初は「入試模試の数学版」と銘打っておりましたが、この企画も広まり、入試模試と張り合える名門企画に近づいてきたかな?と思います (もちろん難易度含め, ですよ!).

さて、去年までの2年間和田杯の責任者を務めていた藏田さんが卒業し、今年から私黒田が責任者を務めることになりました。最初は問題なんてすぐ集まるだろうと思っていたのですが、締め切りの日が近づいてもほとんど問題が集まらず、結局苦心してほとんどの問題を私が作ることになってしまいました。皆さんほんとに問題作ってください...

おそらく私は来年もこの企画の責任者を務めると思うのですが、是非とも来年こそ、作問する生徒の人数を広げ、問題の幅を広げたいと思います。来年以降も和田杯をご贖いに、どうぞよろしく願いいたします。

話は変わりますが、去年と同じように、今回の和田杯も、インターネットを通じたコンテスト化を計画しています。これは、来場者の方々と和田杯を解いてくれた方がこちらの想定より少なく、また逆に Twitter 上で思いの外多くの方々が解いてくれたことを受けて始まったものなのですが、下記に記載しているメールアドレスまたは Twitter アカウントに答案を送ってくだされば、正誤判定いたします。こちらドキドキして待っております。

答案の正誤判定については1ページ目にお書きした通りです。文化祭後でも郵送にて正誤判定は受け付けますが、コンテストとしての都合上なるべく文化祭期間中をお願いいたします。参加者数が多いほうが嬉しいので、1問でも解けた方はお気軽に答案を我々にお見せください。1人でも多くの方々の参加を心待ちにしています。

それでは! Good Luck!

・答案郵送先 (返信用の切手を同封してください):

〒658-0082 神戸市東灘区魚崎北町 8-5-1 灘校数学研究部

数研メールアドレス:suken114810@gmail.com

Twitter アカウント:@nada_mathclub

・数研 HP です。

<http://nada-mathclub.jimbo.com>

文責 高校2年 黒田 直樹