獲得金メダル!日本数学オリンピック＆僕の解いてみた集

黒田直樹

1 はじめに

本日は数学研究部にお越しいただきありがとうございます. 灘高 2 年の黒田です. まずこの記事では, 数学オリンピックへ挑戦してる中高生向けの部誌となってます. なぜ私がこのような部誌を書こうと思ったのかというと, まず数学オリンピックに挑戦するうえで非常に良い本である「獲得金メダル!国際数学オリンピック」に触発されてです. この本は当然本の中で非常に強力な定理や, とても参考になる解説を, 過去の数学オリンピックメダリストが行っていて, 数学オリンピックを受ける上で必要不可欠な本とも言われている, 大変参考になるものです. ところが, この本は国際数学オリンピック（IMO）向けの本となっており, 本に書いてある内容は, 日本数学オリンピック（JMO）で出る問題よりも数段難しいものとなっていて, 国際数学オリンピックを受けるために春合宿という, 日本数学オリンピックで入賞しなければ参加することができないものを受けなければならない以上, 数学オリンピックの参考書としては少し難しいものになっています. そこで, この記事では,「日本数学オリンピックの本選を突破し, 春合宿に参加する」ことを焦点にして書こうと思ってます. 無論, 上記で紹介した本は大変素晴らしいものであり, それを卑下する内容ではないということを強く伝えておきます. この記事を読んだ方々が,「数学オリンピックがこんなものなら僕も受けてみたいな」と思えてもらえたらうれしい限りです. また, この部誌の後半部分は, 僕が, 数学オリンピック対策として過去問などの問題を解いてる時に,「こういう難しめの問題の解いた過程も参考に見てもらえれば良さそうだなぁ」と思い,(数学オリンピックの本選に比べると難しいと思いますが) どのようにして, 難問に取り組めばいいのか, どういう風に手を付けるのかについて, 少しでも雰囲気を感じ取ってもらえたらうれしい限りです.

2 数学オリンピックとは?

数学オリンピックというのは, 一年に一回全国対象に開催されてる大会で, 日本数学オリンピック（以後 JMO と表記）と日本ジュニア数学オリンピック（以後 JJMO と表記）の 2 種類あり, それぞれ高校生, 中学生向けの大会となっています. 毎年予選が 1 月, 本選が 2 月に開催されており, 本選を突破したら参加できる春合宿は,3 月下旬に行われています. 時間と問題数は,JMO と JJMO ともに予選が 12 問 3 時間で単答形式, 本選が 5 問 4 時間で記述式, 春合宿は 3 問 4 時間半で記述式, となっています. いずれも問題は大体難易度順に並んでおり, 前の問題ほど易しく, 後ろの問題にいくほど難しくなっています. 3 時間,4 時間という長時間のコンテストということもあって, 敬遠されがちがもしれませんが, 解く上で必ず知っておかなければならない知識（例えば情報オリンピックでは, プログラミングでの文の打ち方など）は必要なく, 純粋な数学力が試される試験となっていて, 非常に面白いものだと思います. またこの記事では触れませんが, 小学生向けにも算数オリンピックというものがあり, 小学生の方も, この記事を見てそういうコンテストにチャレンジする心が出てきたら幸いです.

この記事では, 本選向けの記事を書こうと思います. というのも, 予選は様々なジャンルの問題が出て対策が

難しいうえに, 求められるものが, どちらかというと「早く間違いなく解く」能力で, あまりここで述べるものではないと思ったからです. 無論, 予選はみなさんが受けないといけないものなので, 当然何らかの対策が必要ですので, 是非過去問を見て解いてみてください.

3　どんな問題が出るの?

本選が 4 時間で 5 問という形式であることは前述したと思いますが, 難易度順であることも相まって,5 番は国際数学オリンピックでも難しい部類に入るほどの超難問が出題されてるのに対し,1 番に関してはそこまで多くのステップを要しない比較的易しい問題が出ます. 大体本選通過のラインは, 例年 2 完 + α ほどなので,「易しい問題, 自分にとって得意な分野の問題」を選んで解くことが, 本選通過において重要なファクターになるわけですが, 大体問題順に並んでることからすると,

・　まず 1 番と 2 番に手を付け, できるだけ完答を目指す

・　3 番,4 番については, 部分点をとりにいき, あわよくば完答を目指す.（5 番に手を付けるのはお勧めしません.・・・）

こういうようにやるのが良いと思います. 実際私が本選を通過できた時も上記のようにやったので, まあこれが一番安定してると思います. さて, 完答についてですが, 記述式とは言ったものの, あまり格式ばる必要はないでしょう. それよりも, 書いていることに破綻はないか, 論理の飛躍がないかということが重要になってくるのですが, ここでは詳しく書くのは省略します. 少し丁寧目に書くというのを意識していたら, あまり減点対象になることはないと思います. ここでは, 問題を見て, 筆者がどのように解いたのかを, 試行錯誤についても書く, いわば「解いてみた集」のような形式で書くことにします.

4　実際の問題を見てみよう！

さて, ここまで数学オリンピックの仕組みについて話しましたが, 正直理解できない, よく分からないという人も多いと思います. 確かに, 一見 5 問 4 時間というのを見ると敬遠してしまうかもしれません. ですが, 問題はなかなか綺麗なものも多く, 楽しいと思ってもらえると思っています. 次の問題を見てみましょう

問題

$2^a + 3^b + 1 = 6^c$ を満たす正の整数の組 (a, b, c) の組をすべて求めよ.　$(JMO2014-2)$

なかなか綺麗でシンプルな問題ではないでしょうか. 競技数学の楽しさを知ってもらえれば幸いです.（この問題は後にまた取り上げます）

5　実際に解いてみた

ここまで書きましたが, 数学オリンピックを既に知っている人は, ここまでの前置きが長く感じたでしょう. ここからは, 実際に JMO で出た問題のうち, 1 番, 2 番の問題について, 私が解き, その軌跡を書き記します. どのようにして解くのかというのを参考にしていただければ幸いです. あと, 問題について, やはりこういう競技数学は, 解いた問題数に応じて力が付くと思うので, 解説を見る前に各個人で一度考えるのがいいと思います. 問題については, 幾何, 整数論, 組み合わせ, 代数の順に 2 問ずつ並べています. 分野別に並べてるので, 好きな分野から解き始めてもらえればいいと思います.

1. 鋭角三角形 ABC の垂心を H とし, 線分 BC の中点を M とする.H を通り直線 AM に垂直な直線と直線 AM との交点を P とするとき, $AM \cdot PM = BM^2$ が成り立つことを示せ $(JMO2011-1)$

2. 円に内接する四角形 $ABCD$ があり, $AB : AD = CD : CB$ をみたしている, 直線 AD と直線 BC は天 X で, 直線 AB と直線 CD は点 Y で交わっている, 辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ E, F, G, H とし, $\angle AXB$ の二等分線と線分 EG の交点を S, $\angle AYD$ の二等分線と線分 FH の交点を T とする.このとき, 直線 ST と直線 BD が平行であることを示せ $(JMO2016-2)$

3. p を奇素数とする.1 以上 $p-1$ 以下の整数 k に対し, $kp+1$ の約数のうち, k 以上 p 未満となるものの個数を a_kとおく, このとき $a_1 + a_2 + \cdots a_p - 1$ の値を求めよ.$(JMO2016-1)$

4. $2^a + 3^b + 1 = 6^c$を満たす正の整数の組 (a, b, c) の組をすべて求めよ.　$(JMO2014-2)$

5. n, k を正の整数とし, $n \geqq k$ とする, n 人の人がいて, どの人も団体 $1, \cdots,$ 団体 k のうちちょうど 1 つに属している, また, どの団体にも一人以上の人が属している.このとき, 次の条件をすべてみたすように n 人の人に n^2 個のお菓子を配ることができることを示せ :

・ どの人にも少なくとも 1 つのお菓子を配る,

・ 団体 i に属する人には a_i個ずつのお菓子を配る $(1 \leqq i \leqq k)$.

・ $1 \leqq i < j \leqq k$ ならば $a_i > a_j$である.$(JMO2013-1)$

6. n を 2 以上の整数とする.一辺の長さが n の正六角形 $ABCDEF$ があり, 一辺の長さが 1 の正三角形に分割されている.正三角形の頂点を単に頂点と呼ぶ.
正六角形 $ABCDEF$ の中心に駒が置かれている.正六角形 $ABCDEF$ の内部 (周上を含まない) にある頂点 P それぞれについて, P と長さ 1 の辺で結ばれている 6 頂点のうち, 4 頂点に向かって矢印が描かれていて, 頂点 P に駒が置かれているときその 4 頂点のいずれかに駒を動かすことができる.ただし, 長さ 1 の辺 PQ について, 頂点 P から頂点 Q に駒を動かすことができる場合でも頂点 Q から頂点 P に駒を動かすことができるとは限らない.
このとき, どのように矢印が描かれていても駒を高々 k 回動かして正六角形 $ABCDEF$ の周上にある頂点に到着させることができるような整数 k が存在することを示し, k として考えられる最小の値を求めよ.$(JMO2015-2)$

7. 実数に対して定義され実数値をとる関数 f であって, 任意の実数 x, y に対して

$$f(f(x+y)f(x-y)) = x^2 - yf(y)$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.$(JMO2012-2)$

8. 整数に対して定義され実数値をとる関数 f であって, 任意の実数 m, n に対して

$$f(m) + f(n) = f(mn) + f(m+n+mn)$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.(JMO2013-2)

6　解答編

1. 鋭角三角形 ABC の垂心を H とし, 線分 BC の中点を M とする.H を通り直線 AM に垂直な直線と直線 AM との交点を P とするとき, $AM \cdot PM = BM^2$が成り立つことを示せ $(JMO2011-1)$

幾何の問題ですね, 1 番だからそんな難しいことはないだろうと高をくくりつつ取り組む.まず図を書く.
$AM \cdot PM = BM^2$が成り立つ直線 AM 上の点 P って割といろいろ性質があったと思うけど, 今回示すことは HP と AM が直交することですね.
うーむ, こういうシンプルな問題は簡単なはずだが, なかなか思いつかない $\cdots$
ここで閃く, B から AC への垂線の足を E,C から AB への垂線の足を F とすると, 4 点 $BCEF$ は中心を M とした円上にあるじゃん！だって M って直角三角形の斜辺 BC の中点になるからね.すると $MB = MF$ になるから, 示すことは $AM \cdot PM = MF^2$になりますね.
ここで, AH を直径とする円上に E, F, P があることを踏まえると, 題意の式って方べきっぽい, すると, MF がこの円に接することを言えば勝ちですね, でこれは角度を見てみればいけそう.
$\angle FAH = 90^\circ - \angle B = \angle FCB = \angle FCM = \angle MFC = \angle MFH (MC = MF$ より)
これで接弦定理の逆から MF がこの円に接しますね！よってこの問題は示せましたね.

感想

シンプルな問題ですが, 非常に初歩的な性質を組み合わせればできるという点で非常に良問だと思いました.
M が BC の中点であるというところが本質で,M を中心とした BC が直径の円を考えることが出来ればあとはやることをやれば出来る問題でしたね（私は 10 分程度かかってしまった）. あと, この問題は垂心が出てきましたが, こういう場合は伸ばして垂線の足の点はとるようにしましょう. 今回も E,F の点をとることによっていろいろ見えてきたので, やはりこういう補助点はどんどん取っていけばいいと思います（とりすぎて見えなくなるということは（大抵は）ないので）.
あと, こういう易しくシンプル問題ほど採点が厳しい傾向にあるように思うので, 分かったことがあればばんばん書くようにしましょう.

2.円に内接する四角形 $ABCD$ があり, $AB : AD = CD : CB$ をみたしている, 直線 AD と直線 BC は天 X で, 直線 AB と直線 CD は点 Y で交わっている, 辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ E, F, G, H とし, $\angle AXB$ の二等分線と線分 EG の交点を S, $\angle AYD$ の二等分線と線分 FH の交点を T とする.このとき, 直線 ST と直線 BD が平行であることを示せ $(JMO2016-2)$

（この問題は, 本番で私がちょうど受けた問題で, その時の状況を再現しつつ書くことにします.）
辺の比が一緒か, .この条件は再現が難しいから, とりあえずあんまり深く考えずにとりあえず図を書く.

中点を結ぶ直線というのが分かりにくいなぁ, ただ図を見る感じ, $\angle AXB$ の二等分線って, $\angle EG$ の二等分線にもなってくれてそうな感じがする, この事が成り立っててほしいあぁ（ここまでで大体 10 分）
この性質を示そうとする.それは$\angle AXE = \angle CXG$ を示せばいいよなぁと考えてみると, 三角形 AXE と三角形 CXG ってどうみても相似っぽい, よく考えると, 三角形 AXB と三角形 CXD の相似（これは角度見れば分かる）について, E と G って対応する点だから, 当たり前のことだった.
すると $ES : SG = EX : XG$ だけど, $EX : XG$ って上記の相似で対応するんだから, $EX : XG = AB : CD$, 対称性より $HT : TF = HY : YF = AD : BC$, なるほど最初の仮定が生きてくるわけだ, 内項と外項考えればいいから, $AB : CD = AD : BC$ だから, $ES : SG = HT : TF$, だいぶ簡単に言い換えられた気がする.というか中点連結定理から $EH \parallel BD \parallel FGEH \parallel FG$ から ST もこれと平行, それじゃあ $ST \parallel BD$ 　まで言えましたね, これで示せました.

感想
中点が相似で移ることに気付けばすぐでしたね.
やっぱりこういうよくわからない条件が出てくる時は, 簡単に言い換えられることが多いので, それを目指せば, 自然と分かる問題でした.
なお, 余談ですが, 試験本番で解いてるときは, この問題を 30 分ほどで解けてかなりハイテンションになってた記憶があります（やっぱりこういう経験（この年はボーダーが 18 点で,1 と 2 が解ければあと部分点で通った）があると,1,2 が解けるとだいぶ安定するのかなぁと思いました.
基本的に 1,2 は簡単なことが多いので, やはり 4 時間のテスト中にこの 2 問は解きたいですね.）

3.p を奇素数とする.1 以上 $p-1$ 以下の整数 k に対し, $kp+1$ の約数のうち, k 以上 p 未満となるものの個数を a_kとおく, このとき $a_1 + a_2 + \cdots a_p - 1$ の値を求めよ.$(JMO2016-1)$

（一度コンテストで解いた問題ですが, 問題の中身を詳しく覚えていないので再考）$p=3$ で 2, $p=5$ で 4, そうすると $p-1$ か?約数として出てくる値は 1 から $p-1$ が一つずつっぽい, そうすると 1 から $p-1$ までのある値について, $kp+1$ が m の倍数になる k を考えればいいけど, 問題文の条件に k 以上とかいうのがあるから, k が 1 から m までについて考えればいいよな, とすると k に 1 から m までの値を入れると $kp+1$ って $modm$ で 0 から $m-1$ までの値を一つずつとるよね, すると余り 0, つまり m の倍数になるのって一つしかないじゃん!
これで m は, a_1から $a_p - 1$ までのどれかに一つだけ含まれる訳だ, すると 1 から $p-1$ 全てについてこれ考えると, さすがに総和って 1 から $p-1$ までの $p-1$ ですよね, これで示されました.

感想
簡単な問題でした. 小さい数で実験するというのは往々にして有効なことが多いので, それをすると解の予想がすぐできると思います. 2 でも同じことを書いたと思いますが, こういう問題は安定して解けるようにしたいですね.

4.$2^a + 3^b + 1 = 6^c$を満たす正の整数の組 (a, b, c) の組をすべて求めよ.　$(JMO2014-2)$

非常に簡潔で綺麗な整数論の問題ですね.$2, 3, 6$ という, いかにも素因数として $2, 3$ を見てくださいといわんばかりの数字が出てるんで, とりあえずまず 2 で割れる回数を見る.
$2^a, 6^c$が 2 で割れる回数って a, c だから, $3^b + 1$ の部分の 2 で割れる回数を見てみる.
有名なオーダーの定理を使ってみる.
b が偶数の時って $3^b + 1$ って $mod8$ で 2 だから高々 2 で 1 回しか割れないから, 奇数の時を考えて, 2 で割れる回数を考えると, なんか 2 と出てくる.
定理を使い間違えたのかとも考えたが, よく考えたら b が偶数の時は 3^b+1 って $mod8$ で 4 だから高々 2 で 2 回しか割れないじゃん!すると, どの場合であれこの値って 2 で高々 2 回しか割れないよね,
すると a, c のどっちかが 2 以下であることは確定するよね, もう場合分けでいけそう.

$c = 2 \rightarrow 2^a + 3^b$が 35 だから, 上から評価できたしあとはしらみつぶしに調べてもいいよね, すると $(a, b) = (5, 1)(3, 3)$ だけが解として出てくる

$c = 1 \rightarrow 2^a + 3^b$が 5 だから, 上記と同じ理由で $(a, b) = (1, 1)$ だけと分かる.

$b = 2 \rightarrow$右辺は 3 で割れるけど, 左辺 $= 3^b + 5$ は 3 の倍数じゃないので矛盾ですねぇ

$b = 1 \rightarrow 3^b + 3 = 6^c, mod9$ で見ると, b と c が共に 2 以上だと, 左辺は 9 の倍数じゃないけど右辺は 9 の倍数になって矛盾.よってどちらかは 1 なので, するともう一方も 1 と決定しますね, よってこの場合は $(b, c) = (1, 1)$

よって答えは (a,b,c)=(1,1,1)(5,1,2)(3,3,2) だけですね, これで示せました.

感想
結果的に見ると 8 で割った余りを見るだけの一発の問題ですねぇ, ただハマるとなかなか難しそうだと思います. ただ 2,3 という素因数に注目するのは見えると思うので, 私の考え方は割と自然に進められたと思います. 整数論は, 上から評価できればあとは適当にしらみつぶしに調べればいいだけなので, どういうように上から抑えるかを考えるといいと思います.

5.n, k を正の整数とし, $n \geqq k$ とする, n 人の人がいて, どの人も団体 $1, \cdots,$ 団体 k のうちちょうど 1 つに属している, また, どの団体にも一人以上の人が属している.このとき, 次の条件をすべてみたすように n 人の人に n^2 個のお菓子を配ることができることを示せ :

- どの人にも少なくとも 1 つのお菓子を配る,
- 団体 i に属する人には a_i個ずつのお菓子を配る $(1 \leqq i \leqq k)$.
- $1 \leqq i < j \leqq k$ ならば $a_i > a_j$である.$(JMO2013 - 1)$

問題文が長い, 整数が出ているあたり, 整数論的要素もあるのだろうか, と考えながら手を付ける.
30 分くらい考えたが, 進展しない（組み合わせ弱者で辛い）n が小さい時には大体成り立ちそうだというのは分かった. とすると帰納法？とも思ったが, あんまりうまくいかなさそうと思う.
ここで閃く. 団体 1 に a_1個なんて考えるよりも, 団体 1 から i までのグループに入っている人に b_i個のようにすると, $a_k = \sum_{i=k}^{n} b_i$みたいに表されるから, これで大小関係もうまくいきそう. b_kが正という制約をつければ, 問題文の制約をうまく満たすっぽいので良さそう.
団体 1 から k までの人数（つまりは総和）は n だから, 結局「n 以下の k 個の異なる数 (n は必ず一つ含む) について, それらをそれぞれうまく定数倍して足すと n^2になることを示せ」という同値な命題に言い換えられることは分かった.
しかし手が進まない, n^2が最善だったら, 何か綺麗なことをして示せそうな気がするけど, やはり組み合わせ弱者が響いてくる.(ここで 15 分くらい消費)
$n-1$ と n とかだと, $n^2 - n$ 以下の n の倍数はだめ, $k = 1$ の時に n の倍数である必要だから, やっぱり n^2が最善だ.
こういう風にして適当に実験してると, $n-1$ 以下の数字で適当に組み合わせて n の倍数にして, 最後に n を何個か足して n^2にするというのが思いつく.
これでうまくいきそうなんだけど, n の倍数にするやり方を効率的にしないとすぐに n^2を超える.(ここで最初からすでに 1 時間半程度経過)
とここで思いつく, 例えば a と b をうまく足し合わせて n の倍数にしたいとき, $n-b$ 個と a 個とかにすれば良さそう, 明らかに a とか b とかって $n-1$ 以下だから, ちゃんと 1 個以上は足し合わせてるし和も an でこれは明らかに $n^2 - n$ 以下だから, n も一つは使う, これで良さそう.
ちゃんと文章化する. $c_1(=n), c_2, \cdots, c_k$について（これは大きい順に並べている）$c_1$を $c_1 - c_2$個, c_2を $c_1 - c_3$個, $\cdots$, c_iを $c_{i-1} - c_{i+1}$個$\cdots$, c_kを c_{k-i}個集めて足し合わせると, すべて一つ以上は足しあわされていて, 総和を考えると, いっぱい相殺されて結局 ${c_1}^2 = n^2$になる.
よってうまく足し合わせて n^2にできますね, これでようやく証明終わりです.

感想
いや〜長かった（2 時間ほど）私が受けたコンテストでこれが 1 番に出たら大苦戦間違いなかったでしょう.1 番級にしては難しいと思いました. なお模範解答は, 上記の言い換えをせずに a_iの具体例構成をしていましたが, やはり上記の言い換えをすると実験などができて, いろいろ見えやすくなったので, 本番ではいろいろ手を動かしてみるというのはやはり重要な手段でしょう. 時々こういう地雷みたいな 1 番が出るので, みなさん注意をして, 出来なさそうなら 2 番に移った方がいいと思われます（この年の 2 番は関数方程式で, 代入をしてると見えやすい問題だったと思うので）

6. n を 2 以上の整数とする. 一辺の長さが n の正六角形 $ABCDEF$ があり, 一辺の長さが 1 の正三角形に分割されている. 正三角形の頂点を単に頂点と呼ぶ.
正六角形 $ABCDEF$ の中心に駒が置かれている. 正六角形 $ABCDEF$ の内部 (周上を含まない) にある頂点 P それぞれについて, P と長さ 1 の辺で結ばれている 6 頂点のうち, 4 頂点に向かって矢印が描かれていて, 頂点 P に駒が置かれているときその 4 頂点のいずれかに駒を動かすことができる. ただし, 長さ 1 の辺 PQ について, 頂点 P から頂点 Q に駒を動かすことができる場合でも頂点 Q から頂点 P に駒を動かすことができるとは限らない.

このとき, どのように矢印が描かれていても駒を高々 k 回動かして正六角形 $ABCDEF$ の周上にある頂点に到着させることができるような整数 k が存在することを示し, k として考えられる最小の値を求めよ.$(JMO2015-2)$

いや問題文が長い.ちなみに問題文には図が添付されていましたが私の tex 打ちの技術が低いためなしです.もし図が見たければ数学オリンピック財団の問題文を見てみてください.
さて, 真面目に考える.組み合わせ論っぽい組み合わせ論だが, あまり見たことのないタイプ.とりあえず k が存在することを示さないといけないので, それを目標にする.
まあとりあえず小さい n で実験.$n=2$ の時, どう矢印を置いても 2 回でいける.$n=3$ の時 3 回でいけるか考えたが, 無理な反例が見つかるが, 4 回ではいけるっぽい.
というか図を書いていて思ったが, 矢印の数って 1 頂点につき 4 個だから, そうすると外向きに行ける矢印って絶対一つはある.ならさすがにどっかで一番外側までいけるよね.そうすると k があることは分かった.
この外側っていうニュアンスが変だけど, なんというかイメージ的には$\frac{1}{2}$歩の前進と考えやすそう.本題に戻す.とりあえず始めの一回の移動は一歩と考えていい.その一歩で進んだ辺を含んだ半直線を考えるといいのでは?絶対$\frac{1}{2}$歩分は進んでいる.n 歩分進めば ok だから, そうすると $k=2n-1$ が最善?と思ったが, 小さい数で実験したのと違う.
何かが違うと思ったが, よく考えると, $n-\frac{1}{2}$歩進めば, 絶対辺にぶつかる（例えば, A に隣り合う辺上の頂点が丁度中心から $n-\frac{1}{2}$歩分ですねぇ）から, $k=2n-2$ となる?とりあえず小さい数で実験した感じこれが正しそうなので, 必ず $2n-2$ 回の移動が必要な例を構成したい.
とりあえず中心を通る直線上の頂点については, 外側に向かう矢印以外の 5 個のうちの 4 個を適当に選んで良さそう.それ以外については, 必ず中心と正六角形の頂点二つ（A と B としてみる）を頂点とする正三角形にあるから, 辺 AB に近づく二つの辺以外の 4 つの辺に矢印を設置する.
こうしてみると, 最初以外絶対$\frac{1}{2}$歩しか進めないように構成できてる気がする.この時 $2n-2$ 回必要なのは明らかだよね, 同様に絶対毎回$\frac{1}{2}$歩は進めるから, これと併せて $k=2n-2$ が示されましたね.これでできました.

感想
こういう問題はイメージ的には理解しやすいですが, やはり答案に書くのは難しそう…
やはり$\frac{1}{2}$歩は進めるという閃きが全てだったと思います.この問題に関しては 30 分ほどで解けたのですが, 5 であんなに苦戦したのに $\cdots$ という事は思ってしまいます.やはり小さい数で実験というのは有力な方法だと実感した問題だと思いました.こういうことはかなりの問題で有力なので, やはりこういうように手を動かしてみましょう.

7.実数に対して定義され実数値をとる関数 f であって, 任意の実数 x, y に対して

$$f(f(x+y)f(x-y)) = x^2 - yf(y)$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.(JMO2012-2)

1 番級の代数の問題はここ十年探してなかったので, 2 番級の問題を 2 つとりあげることにします.さて, 非常にオーソドックスな関数方程式ですね, 解は $f(x)=x$ になると思われるので, とりあえずそれを目標に進めて

いくことを考えます.
さて, 左辺って y に $-y$ を代入しても変わらないことに気付く.与式の y に $-y$ を代入した式と元の式を比較して $-f(y)=f(-y)$ で, f は奇関数.すると与式の x と y を交換してみたい.左辺は -1 倍されただけで, 右辺は結構変わってくれるので, かなりいい気はする.実際

$$x^2-yf(y)=-(y^2-xf(x)) \text{ より } x^2+y^2=xf(x)+yf(y)$$

これ $y=0$ 代入したら $f(x)=x\cdots$と思ったけど $x=0$ の時だけ $f(0)$ の値はまだ定まらない.でももし $f(0)$ が 0 じゃなかったら $f(x)$ って零点持たないことになるけど, 与式の x と y に 0 を入れると明らかに右辺が 0 だから, 絶対零点ってあるよね.じゃあ $f(0)=0$ なわけだ.じゃあこれで任意の実数 x について $f(x)=x$ が言えましたね, これで示されました.

感想
シンプルな関数方程式で,2 番級としては簡単な気がしました. やはり x と y を入れ替える代入をするのが全てだったのではないでしょうか. ただ関数方程式はうまい代入をできないと見えなくて苦戦するみたいなことも多いと思います.
やはりこういう問題は経験がものを言うと思うので, 苦手意識がある人はこういう問題を調べて解いてみるのがいいと思います.
8.整数に対して定義され実数値をとる関数 f であって, 任意の実数 m,n に対して

$$f(m)+f(n)=f(mn)+f(m+n+mn)$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.(JMO2013-2)

整数から実数の関数方程式はほとんど見ないので, なかなか珍しい形のものだと思います.
さて, とりあえず $m=0$ を代入して…ありゃ, 恒等式になっちゃった.
しょうがないので, $f(n)$ と $f(mn)$ が相殺して消える $m=1$ を代入してみると

$$f(1)=f(2n+1)$$

となり, f は奇数の時にある定数になることが分かる.とりあえずこの値を c としておく.
さて, 奇数の時の値がわかったので, m に奇数を代入してみる.$m+n+mn$ って m が奇数の時に絶対奇数だから, $f(n)=f(mn)$ だから, 結局 $f(m)$ というのは m が 2 で割れる回数にだけ依存する (0 は一旦分けて考えておく) ということが分かる.
さすがに偶数の場合は全部同じ値をとりそうなので, m が 2 で丁度 a 回, n が 2 で丁度 b 回割れるみたいなことをしてみる.$a=0$ とかの時はさっき試したので, a と b がともに 1 以上にして実験してみる.すると, $a<b$ の時に良さそうなことが起こりそうな気がする.$m+n+mn$ って結局 2 で割れる回数って a 回だから, $f(m)$ と $f(m+n+mn)$ って同じ値.だから $f(n)=f(mn)$ だから, 結局 2 で b 回割れるのと 2 で $a+b$ 回割れるのとは関数の値は一緒.a と b は $a<b$ 以上の制約がないので, 結局 4 の倍数の時の値はある定数になると, これを d としますか.
$m=2, n=2$ を代入してみる.$2f(2)=2d$ だから, $f(2)=d$, だから 2 で丁度一回割れる数字についても, 値は d, よって 0 じゃない偶数 $2k$ について, $f(2k)=d$, これで 0 じゃないときはすべて分かった.
最後は $f(0)$ だけなんだけど, m とか n とかに 0 を入れると自明な式しか得られないから, $m+n+mn$ が 0 にな

る場合を考えたい.$m = -2, n = -2$ でいける.この時 $2d = d + f(0)$ だから $f(0) = d$
よって $f(m) = c(m$ が奇数$)d(m$ が偶数$)$ という答えが出た.m, n の偶奇の場合分けをして与式に代入しても正しいので, 答えはこれですね.

感想

解いてて楽しい関数方程式でした. 多分間違った方針をあまりとらなかったので, おそらく模範解答通りに解くことが出来ましたが, おそらくみんながやってもこういう感じだと思います. 定義域が整数という特殊なケースでしたが, 整数論的考察を行うことで絞り込むことが出来ました.
こういう問題とは微妙にタイプが違いますが, 整数論での関数方程式の問題は最近多くなってきているので, もしそういう問題を解いてみたいという人は,IMO の shortlist の N 分野の問題を見てチャレンジしてみればよいと思います (この問題よりは難しい問題が多いとは思いますが)

7　解いてみた集

さて, ここからが正直この部誌で最も力を入れている部分であり, そして, ここからの 8 問が私の中の「解いてみた集」です. 実は私は今年春合宿で代表選抜試験を受けており, その対策として過去問や他の国の team selection test やそれと近い難易度の問題を解いてきました. それに加え, 自分の中で非常に思い入れのある 8 問を, 懐かしむ気持ち, 力試しする気持ちで解いています. 正直この節の問題は難しいものが多いと思いますが, 是非みなさん手を付けてみて貰いたいです. また, この節については特に思考回路を開示するつもりなので, 是非とも参考にしてください.

9. 三角形 ABC があり, 外接円をΩ, 内心を I とする.I を通り CI に垂直な直線と線分 BC, A を含まない弧 BC とそれぞれＵ，Ｖで交わるとする.U を通り AI に平行な直線と AV の交点を X とし, V を通り AI に平行な直線と AB の交点を Y とする.線分 AX, BC の中点をそれぞれ W, Z とする.この時, I, X, Y が同一直線上にあるならば I, W, Z も同一直線上にあることを示せ.($IMO2014shortlistG7$)

10. 三角形 ABC があり, 外心を O, 内心を I とする.点 D, E, F をそれぞれ辺 BC, 辺 CA, 辺 AB 上に, $BD+BF = CA, CD+CE = AB$ となるようにとる.三角形 BFD の外接円と三角形 CDE の外接円のうち D でない方を P とする.この時 $OP = OI$ となることを示せ.($IMO2012shortlistG6$)

11. $\varphi(n)$ で, 1 以上 n 以下の数で n と互いに素なものの個数を表すことにする.正の整数 n, k について,

$$\underbrace{\varphi(\varphi(\cdots(}_{k\text{ 個}}n)\cdots)) = 1$$

が成り立っているとする.この時, $n \leq 3^k$となることを示せ.($USA\ TST\ Selection\ Test$ 2016 4)

12. $a_1 < a_2 \cdots < a_n$をどの二つも互いに素 n 個の正の整数とし, a_1は $n + 2$ 以上の素数であるとする.区間 $I = [0, a_1a_2 \cdots a_n]$, a_1から a_nまでのいずれかで割り切れる整数に対応する点すべてで分割する.この時, でき

た各線分の長さの 2 乗和が a_1の倍数であることを示せ.($IMO2014$ $shortlist$ $N6$)

13. r を正の整数とし,$a_0, a_1, \cdots$を,無限に続く実数からなる数列とする.任意の非負整数 m, s について,$m+1$ 以上 $m+r$ 以下のある正の整数 n があり,

$$\sum_{k=m}^{m+s} a_k = \sum_{k=n}^{n+s} a_k$$

を満たすものがあるとする.この時,ある正の整数 p があり,$a_{n+p} = a_n$が任意の非負整数 n について成り立つことを示せ.($IMO2013shortlistC5$)

14. 平面上の有限個の点からなる集合を S とし,S は 2 個以上の点を含み,どのように S の 3 点をとっても同一直線上にはないとする.直線 l が,S の点 P を通り,P 以外の S の点を通らないとしたとき,l から定まる風車とは次のような一連の操作を指す：
まず l を P を中心として時計回りに回転させ,P 以外の S の点を初めて通るところで止める.その S の点を Q とし,その直線を Q を中心として時計回りに回転させ,Q 以外の S の点を通るところで止める (ここで,まったく回転しないことはないとする).以下,これを無限回繰り返す.
このとき,S の点 P と P を通る直線 l をうまく選ぶと,l から定まる風車における回転の中心として,S の度の点も無限回現れるようにできることを示せ.($IMO2011$ 2)

15. P, Q を互いに素な実数係数の多項式で,定数関数でないものとする.この時,$P + \lambda Q$ がある実数係数の多項式の二乗となるようなλは高々 3 つしかないことを示せ.($USA\ Team\ Selection\ Test$ 2017 3)

16.実数について定義され実数値をとる関数 f であって,任意の実数 x, y について

$$f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2$$

が成り立つものを全て求めよ ($IMO2009shortlistA7$)

8　解答編

9. 三角形 ABC があり,外接円をΩ,内心を I とする.I を通り CI に垂直な直線と線分 BC,A を含まない弧 BC とそれぞれＵ，Ｖで交わるとする.U を通り AI に平行な直線と AV の交点を X とし,V を通り AI に平行な直線と AB の交点を Y とする.線分 AX, BC の中点をそれぞれ W, Z とする.この時,I, X, Y が同一直線上にあるならば I, W, Z も同一直線上にあることを示せ.($IMO2014shortlistG7$)

$G7$ だけどめちゃくちゃとっつきやすそう,力試しとしてチャレンジしてみる.
とりあえず図を書く.I, X, Y が共線になるように図を書くのめんどくさそう $\cdots$ と思ったけど,たまたまそんな感じに書けたのでこの図を参考に話を進める.
とりあえず共円とか示せればいいなぁと思いつつ角度計算をしたい.$x = \frac{1}{2}\angle A, y = \frac{1}{2}\angle C$ としておく.$\angle BIC = 90$°$+ x$, $\angle BIU = \angle BIV = x$ か,これと $AI \parallel VY$ から$\angle BYV = \angle BAI = x$ だから,円周角の定理の逆から $BVIY$ は共

円か.
同様にして, UX と AB の交点を D としておくと, $BDIU$ が共円ですねぇ, 特に $\angle IBU = \angle IBD$ だから, $ID = IU$ で, 三角形 IDU は二等辺三角形と, 頂角は角度計算すると $2x + 2y$ ですね.
とりあえず角度計算はここらで限界そう（x と y の一次結合で表される角は大体調べた）ので, とりあえず, 問題文の, I, X, Y の共線を簡単に言い換えたい.おそらくこのステップが難しいのだろうと考えつつ取り組む.
とりあえず I, X, Y を線分で結んで, 何か見えてこないか・・・・ そうか!$DX = XU$ だ!
だって YV, DU, AI は全部平行だから, $DX : AI = XU : AI = XY : IY$ で, 最初の二つの比から言えるじゃん.じゃあ $DI = IU$ と組み合わせると, IX って DU の垂直二等分線じゃん!(今めちゃくちゃテンション上がってる)
これは実に情報量が多い.AI と IX が直交するから, 三角形 AIX は直角三角形.なるほど, そのための線分 AX の中点か, 直角三角形の斜辺の中点って周りの角度全部求まるじゃん!かなりいい線いってるんじゃないだろうか.
あともう一つ重要な性質がある.IX は線分 DU の垂直二等分線だから, つまり IX は $\angle DIU$ の二等分線, つまり $\angle XIU = x + y$.もう角度計算でいいところまでいけるのでは？と思いつつも, 3 番級幾何なので, 慎重にいく.
$\angle YIV = x + y$ だから, $BVIY$ の共円から $\angle VBY = 180^\circ - (x + y)$, あれこれって AV の円周角だよね?つまり $\angle ACV = 180^\circ - \angle ABV = x + y, \angle BAV = \angle BCV = x - y, \angle IAX = \angle IAV = y, \angle WIX = 90^\circ - y, \angle XIU = x + y$ だから, $\angle ZIU = 90 - x$ が示せれば勝ちですね, でも Z って BC の中点だから, 厳しそう.ここで悩む.
ここで思いつく.線分 CV の中点を E とおくと, WIE って同一直線上にあるくね?だって直角三角形 CIV について考えると, $\angle ICV = x$ だから, $\angle EIV = 90^\circ - x$, だからさっきと同じ理由で, I 周りの角度の和が 180° になるから, WIE って共線だ.じゃあ ZE と WI の平行が示せればいいんじゃね?ZE って中点連結定理から BV と平行だから, $BV \parallel WI$ が言えれば勝ち!
$\angle AIW = y$ だったから, $AI \parallel YV$ と合わせると $\angle BVY = y$ が言えれば勝ちだけど, これはもう角度計算でいけてね?実際 $\angle BVY = \angle BIY = \angle VIY - \angle BIV = (x + y) - \angle BYV = (x + y) - x = y$ だから, いけてるじゃん!!やったぜ三番級幾何が解けたぜ.

感想

やっぱり IXY の共線の言い換えが重要なステップでしたね.$DX = XU$ が言えれば, あとは角度計算で, いけましたね, あと,「これが示せれば勝ちだなぁ」と思って, それを逆から示すというのは非常に有効な手段なので, 是非使ってください.
shortlist を見るとよく思うのですが, こんなに綺麗な問題がどうやって作れるのかと思ってしまいます.18 と同じですが, シンプルな見た目からこんなに綺麗な難問が作れるのが素晴らしいと思い, 解いてみた集に入れました.

10. 三角形 ABC があり, 外心を O, 内心を I とする.点 D, E, F をそれぞれ辺 BC, 辺 CA, 辺 AB 上に, $BD + BF = CA, CD + CE = AB$ となるようにとる.三角形 BFD の外接円と三角形 CDE の外接円のうち D でない方を P とする.この時 $OP = OI$ となることを示せ.($IMO2012shortlistG6$)

すごく綺麗な主張だけど, めちゃくちゃ扱いずらい・・・外心と内心の距離って確か $\sqrt{R^2 - 2Rr}$ で表されたと思うけど, 長さ計算は無理そう, とりあえず初等幾何で言い換えていって, 分かりやすくしていきたい.
とりあえず図を書く.内接円はあんま本質じゃないけど, 外接円はとりあえず書いておく.$BD + BF = CA, CD + CE = AB$ が成り立つ時って $AE + AF = BC$ も成り立ってるよね（周長見れば明らか）じゃあ問題文の条件って対称的なのか.あと P 周りの角度を見るとＰって三角形 AEF の外接円上にあると, ここも対称的な条件だな

ぁ$\cdots$と思いつつ何も進まない$\cdots$.
ここで思い出す.三角形 BDF の外接円って定点を通らなかったっけ,$\angle B$ の 2 等分線上にあったと思う.半直線 BA 上に $BG = AC$ となる点をとって,$B'B = B'G$ となる点 B'を$\angle B$ の 2 等分線上にとってみる.すると 2 辺夾角相等から三角形 $B'BD$ と三角形 $B'GF$ って合同だから,すると$\angle DB'F = \angle BB'G = 180^\circ - 2\angle B'BG = 180^\circ - \angle B$,やっぱり B'って三角形 BDF の外接円上にあることが分かった.
B'って D, F によらない定点だから,とりあえずこの B'に関する情報が知りたい.三角形 $BB'G$ って頂角が $180^\circ - \angle B$ の 2 等辺三角形だけど,これってよく見る気がする$\cdots$・そうだ! BI を伸ばして三角形 ABC の外接円の交点を H とすると,三角形 AHC ってこの三角形そのものだ!!だって底辺の長さが一緒だし.じゃあ $BB' = AH = HC$ だと,しかしここからすすまないなぁ$\cdots$・
ここで閃く!$AH = HC = HI$ じゃん!これは有名な性質で,角度計算ですぐ導ける.とすると $BB' = HI$ じゃん!BH って円の弦だから,すると $OI = OB'$じゃん!OI という変な長さが示すべきことな以上,この手順はすごく的を射ている気がするぞ$\cdots$すごくいい感じだ.
図を書き直す.B'と一緒に A'と C'を同様にとる.O を中心に,OI を半径とする円をΩとしておく.Ω上に A', B', C'をとる.とても図がシンプルだ.示すことは $OP = OI$ だから,結局 P がΩ上にあることを言えばいいのか$\cdots$でもうまく進まないなぁ$\cdots$
やっぱり,辺上で円が交わるという条件が言い換えにくいなぁ,いっそ$\angle BDP + \angle CDP = 180^\circ$の式を変形できる?$BB'DP$ の 4 点って共円だから,B, B', I の 3 点って同一直線上にあることから,$\angle IPB'$と$\angle BDP$ って,位置関係考えると同じか和が 180°になるかだと思うけど ,これ$\angle IPC'$と$\angle CDP$ についても使えるのでは?位置関係によって場合分けはめんどくさいけど,どの場合でも簡単に $IPB'C'$が共円であることが分かるじゃん!!これで示せましたね.

感想
シンプルな構図で,示すことも綺麗だけど,なかなか難しかったです.やはり A', B', C'という点をとるのが大きな進歩でした.
外接円がある定点を通るみたいな問題はよく見るのですが,それを 1 問題の中で使わせるのはなかなか見ないので,難しくしてる原因なのかもしれません.結果論にはなりますが,O を中心する OI を半径とする円を書いて,その円上に P があることを示したいな〜みたいな感じでやればもっと早く見えるのかもしれませんが,やはりこういう補助点をとるのは難しいと思います.
なお余談になりますが,去年の部誌に,全く同じ問題を取り上げてる記事があるので,もしよければ参考にしてみてください.

11. $\varphi(n)$ で,1 以上 n 以下の数で n と互いに素なものの個数を表すことにする.正の整数 n, k について,

$$\underbrace{\varphi(\varphi(\cdots(}_{k\text{ 個}}n)\cdots)) = 1$$

が成り立っているとする.この時,$n \leq 3^k$となることを示せ.($USA\ TeamSelectionTest$ 2016 4)

綺麗な整数論,とりあえず小さい k で n の最大値を確かめる
知っている人も多いと思うけど,この関数ってオイラーのファイ関数といって,調べるとすぐ出てくるので,知らない人は是非調べてみてください.

$k=1$ なら $n=2$ が最大.$k=2$ なら $n=6, k=3$ だと $n=18$ っぽい.というか $n=2\cdot 3^{k-1}$なら条件満たすよね.調べた感じこれが最大っぽい.とりあえずこの評価ってだいぶきつめなのは分かった.
とりあえず,$n=2^a\cdot {p_1}^{a_1}\cdot {p_2}^{a_2}\cdots {p_i}^{a_i}$みたいにおいて,これが$\varphi()$ 一回でどう変化するかを考えたい.
いろいろ実験したところ,2 の個数が重要っぽいことが分かった.だって,素因数として 2 の個数って,2 の累乗の部分は,2 が 1 になるから一つ減る.他の素因数については,p が $p-1$ になることを考えると,普通は 2 の累乗の部分って増えていくよね,そこを調べてみたい.
3 は一回で 2 が一個分,5 は一回で 4 になって 2 が二個分,7 は一回で $2\cdot 3$,3 が 2 一個分だから,合計 2 が二個分.あれ,これ 2 の個数で上から評価できそうじゃね?一回の操作で 2 の累乗の部分は一つしか減らないから.k 回だと k 個しか減らないよね,2, 3 は 2 一個分,5, 7 は 2 二個分,11, 13, 19 は 2 三個分とか考えると,明らかに 3 をいっぱい集めるのが効率良さそうじゃね？つまり,3^i以上の素数は 2 に換算すると i 個分以上であることを証明すればいいけど,p が $p-1$ になるときに,2 が絶対一個は出てくることを考えると,$p-1$ 以下の時に上の事が成り立てば,帰納的に p の時も上のことって絶対成り立つよね,だって 2 って 3 より大分効率悪いから,じゃあ 3 が一番効率がいいと.じゃあ 3 が n 個集まった時が一番最善,じゃあ 3^nで上から抑えられると,これで示せましたね.

感想
整数論だけど,組み合わせっぽい議論（素因数を見て評価）も要求される問題で,一番級にしては難しいと思いました.最近見た整数論の中でも,整数論以外の議論を要求されるものはあまり見ないので,そういう意味でも印象に残っています.なお,様々な解答があり,面白い別解もあってすごいと思いました.組み合わせっぽい問題は最近よくあるので,最近の問題の対策としてお勧めだと思ったので,解いてみた集に入れました.

参考
n に素因数として 2 が入ってたら,残り 2 の $k-1$ 個分を 3 で集めた $2\cdot 3^{k-1}$,n に素因数として 2 がなかったら,一発目で 2 の素因数が減らないから,結局 n って 2 でいうと $k-1$ 個分しか持てないので,この場合最大値は 3^{k-1},この二つを合わせると,最大値が $2\cdot 3^{k-1}$であることが分かる.

12. $a_1 < a_2 \cdots < a_n$をどの二つも互いに素 n 個の正の整数とし,a_1は $n+2$ 以上の素数であるとする.区間 $I=[0, a_1a_2\cdots a_n]$,a_1から a_nまでのいずれかで割り切れる整数に対応する点すべてで分割する.この時,できた各線分の長さの 2 乗和が a_1の倍数であることを示せ.($IMO2014$ $shortlist$ $N6$)

変な仮定だなぁ,どの二つも互いに素って露骨に中国剰余定理っぽい?とりあえず n が小さい時に試す.$n=2$ の時も割と非自明だし,とりあえずこの場合を証明してみる.とりあえず a_1の倍数を点で打っておくと,a_2の倍数 a_1個って,中国剰余定理から $moda_1$で見ると全部違うよね.そうすると線分 a_1の個数は分からないけど,1 から a_1-1 までの線分の個数は 2 個ずつになることが (実験すると) 分かった.じゃあ 2 乗和は有名な公式を使って$\frac{a_1(a_1-1)(2a_1-1)}{3}$になる.$a_1$は 4 以上だから,$a_1$は 3 で割れないから,これは a_1の倍数,$n=2$ の時に示せた.a_1が $n+2$ 以上っていう条件の意味は分からないけど,割と重要っぽい?という感じはする.
とりあえず一般の n で調べたい.線分の長さとしては 0 から a_1まで出てくるけど,0 と a_1は $moda_1$で見る分には関係ないので,1 から a_1-1 までの線分の個数を調べたい.
長さ 1 の線分って結局 a_1から a_nまでのどれかの余りが 0 でどれかの余りは 1 という座標があれば,その一個前も点であるから ok,だからこういう点の個数が長さ 1 の線分の個数と一致する.でもこういう点の個数って数え

にくい$\cdots$
ここで閃く!!受験数学で似たようなことをやった!!つまり,全事象ー(余り0がない)−(余り1がない)+(余り0も1もない)が0も1もある座標だよね,すると計算できるのでは?めんどくさいので$f(x) = (a_1 - x)(a_2 - x)\cdot(a_n - x)$とおくと,$f(0) - 2f(1) + f(2)$が個数.
一般の場合に考える.長さ$k(1 \leq k \leq a_1 - 1)$の線分の個数も同様$\cdots$だと思ったけど,よく考えたらk戻ったところも点かつ「k戻るまで点が現れない」,ことが必要だ,つまり余りは0かk以上出る必要があると,そういう束縛条件を使って同様に計算すると,個数は$f(k-1) - 2f(k) + f(k+1)$となる.つまりは,$\sum_{k=1}^{a_1-1} k^2(f(k-1) - 2f(k) + f(k+1))$が$a_1$の倍数であることを示せればいいよね,ここで整数係数の多項式って素数pについて0から$p-1$まで代入して足し合わせると基本pの倍数になることを思い出す.$p-2$次以下ならokだよね,それは原始根をとれば,$1^i + 2^i + \cdots (p-1)^i$が,1以上$p-2$以下の数$i$について$p$の倍数になることが分かるから(そんなに難しくないので,考えてみてください).すると,$k^2(f(k-1) - 2f(k) + f(k+1))$の次数を見たい.$f(k)$の次数は$n$なんだけど,$f(k-1) - 2f(k) + f(k+1)$とすると,$n$次の項と$n-1$次の項が相殺されて消える!!だからこれは$n-2$次以下.これに$k^2$を掛けても$n$次以下で,$n \leq a_1 - 2$!!$k = 0$を入れると0になることを考えると$k = 1$から$k = a_1 - 1$まで入れたのを足し合わせると$a_1$の倍数!!これで解けました!!

感想
綺麗な整数論の問題だと思いました.実はこの問題は2年前の春合宿に出た問題で,当時中2だった僕には手の付け方がわからず,全くわからなかった思い出があります.今回割とすんなり解けた時に,成長を実感しました.そういう意味で懐かしく感じ,この問題を解いてみた集に入れました.
なお,数学的帰納法で解く方法もあり,様々な解き方があると思いますが,大筋の中国剰余定理と,$p-2$次以下の整数係数多項式に0から$p-1$まで代入して足すとpの倍数という二つの性質は重要なようです.

13. rを正の整数とし,$a_0, a_1, \cdots$を,無限に続く実数からなる数列とする.任意の非負整数m, sについて,$m+1$以上$m+r$以下のある正の整数nがあり,

$$\sum_{k=m}^{m+s} a_k = \sum_{k=n}^{n+s} a_k$$

を満たすものがあるとする.この時,ある正の整数pがあり,$a_{n+p} = a_n$が任意の非負整数nについて成り立つことを示せ.($IMO 2013 shortlist C5$)

数列,しかも組み合わせ分野$\cdots$俺が超ニガテな分野だ$\cdots$
とりあえず実験してみた感じ,周期を持つ数列については,$n = m + p$とするとok,だから周期を持たないとして矛盾を示す感じか.という感じで矛盾を示そうとしたけど,全くうまくいかないので別の方法を探す.
組み合わせは小さい数で試すというのも有力な手段だった.とりあえずrに具体的な値を入れて実験してみる.
$r = 1$なら,$n = m + 1$が確定するからさすがに実験してみると,数列の値が全部同じになることが言えて,周期が1になってok.でも$r = 2$とかだと結構めんどくさそう.
この問題の難しいところって,nの値がm, sの値によって変わる可能性があるとこなんだよなぁ,うまくそこを解決したいなぁという感じで$r = 2$について考える.(ここまでで15分くらい)
$s = 0$の時を考える,$a_m = a_n$だから,a_mの次の2つの項の少なくともどっちかはa_mと同じ値だよなぁ$\cdots$難しいなぁ,

ここで, 3 つの異なる値が数列に出てきたらやばそうじゃね?と思う.だってある数 c が数列に入ってたら, 一つ後か二つ後に c が再出現するというのを考えると, 2 つの連続する項のどっちかに c ってあるよね.だって二つの項を飛ぶのは, 条件からありえないからなぁ $\cdots$ と考えると, 三つの異なる数が出ると, 十分先の連続する二つの項に 3 つの数が出ることになって矛盾, じゃあ数列に出る数字って高々 2 種類. 1 種類なら数列の値全部一緒で, 2 種類なら, $s = 1$ の時を考えると, その二つの数字が交互に出るパターンしかありえないから, 周期 2 か, これで ok だ.
これを一般の r についても言いたいんだけど, ??種類の数しか数列に現れないという議論は流用できそうでは?だって, ある数 c が入ってた時に, 同様にして $s = 0$ の議論を使うと, r 個の連続する項のどこかに c はあるよな, それを考えると高々 r 種類であることは分かった.(ここで 30 分くらい)
$s = 0$ の場合でここまで良さそうな情報を得られることをふまえると, $s = 1$ でもうまくいきそう?とか考え試行錯誤したものの, 何も得られず $\cdots$.とりあえず, r 種類の数字が出てくるとすると, r 個の連続する項に r 種類の数字が出てくるから, 結局周期が r になることが言えた.でも周期って r 以下なのは分かるけど, r というわけじゃないのが難点だなぁ $\cdots$.
s としてとれる値が非負整数全部なのが厄介だな, でも s が r より大きい時って, $\sum_{k=m}^{m+s} a_k$ と $\sum_{k=n}^{n+s} a_k$ に共通部分があるから, そこを差し引くと, 結局 s って r 以下の時を考えればいいのか?とも思ったけど, 始まる項は任意なのって嬉しくね?
つまり, 問題文の条件って, 結局, 任意の非負整数 m, n に対して, ある $r-1$ 以下の非負整数 s があって, $\sum_{k=m}^{m+s} a_k = \sum_{k=n}^{n+s} a_k$ となる, という風に言い換えられる.かなりいい感じに言い換えられた気がする (ここまでで 1 時間くらい)
ここから, 連続する 2 項から r 項までについて同様にしていろいろ探ろうとしたけど全然うまくいかなかったので, ちょっと考えを変えてみる (ここで 1 時間半ほど経過), a_m から a_{m+r-2}, と a_n から a_{m+r-2} の合計 $2r-2$ 個の数字が決まっていた時に, $\sum_{k=m}^{m+r-1} a_k = \sum_{k=n}^{n+r-1} a_k$ みたいな, a_{m+r-1} と a_{n+r-1} に関する情報が得られないか考える. このためには, 任意の $r-2$ 以下の s について, それぞれについて s 個足した値が違うみたいな状況が起きればいい.でも仮にこれが起きたとしても, この条件は帰納的に回せない, うーんこれも違いそう $\cdots$ ·
ここで閃く!そうか, 戻ればいいのでは?
つまり, 連続する $r-1$ 項があって (以後これをセットと呼ぶ), 同じ二つのセットがあった時に, それぞれの一つ前の項も同じになってくれそう, というかなるじゃん!だってもし違ったらこんな等式が成り立つ s って $r-1$ 以下では絶対存在しないからで, 背理法から示せる!しかも, これは帰納的に何回も戻せるから, 二つの同じセットがあったら, a_0 まで戻れるじゃん!!これめちゃくちゃいい感じでは?
まず, 数列 a_k を $r-1$ 項ずつ, セットに分けていく.上の議論から, 同じセットの組があれば, それぞれの一つ前のセット二つも同じ, だから同じセットがあればかなりうれしいけど $\cdots$ あ, なるほど!!ここで高々 r 種類しか出てこないというのが生きてくる! r 種類の文字を, $r-1$ 個集めると考えると, セットとしてありうるのは高々 r^{r-1} 種類, 有限個だから, あるセットについては, 数列に無限回出てくる.このセットについて考えると超うれしそうなことがおこりそうじゃね?実際上の議論を使うと, そのセットについて, 間隔が同じことが示せる.だって上の性質を使うと, 同じ二つのセットについて, 遡っていってどっちかが元のセットにまで戻ってきたら, もう一方も戻るはずだからね.
じゃあもう示せるのでは?そのセットが等間隔で並んでいるんだから, 同じセットの前も同じセットっていう性質から数列の周期性明らかに導けるじゃん!!やったぜ解けたぜ!

感想

やはり組み合わせは, 難しい発想を必要とする問題が多いので, 個人的にはかなり苦手です. この問題についてはかなりできそうなことに幅があり, 正解の道筋をたどるまでに多くの寄り道をしてしまい, 結果的にこの問題には約 2 時間半くらい解くのに時間を要しました. 苦い思い出がある一問な上に, シンプルで難しい問題だと思ったので, 解いてみた集にカウントしました.

14. 平面上の有限個の点からなる集合を S とし, S は 2 個以上の点を含み, どのように S の 3 点をとっても同一直線上にはないとする.直線 l が, S の点 P を通り, P 以外の S の点を通らないとしたとき, l から定まる風車とは次のような一連の操作を指す :
まず l を P を中心として時計回りに回転させ, P 以外の S の点を初めて通るところで止める.その S の点を Q とし, その直線を Q を中心として時計回りに回転させ, Q 以外の S の点を通るところで止める (ここで, まったく回転しないことはないとする).以下, これを無限回繰り返す.
このとき, S の点 P と P を通る直線 l をうまく選ぶと, l から定まる風車における回転の中心として, S の度の点も無限回現れるようにできることを示せ.(IMO2011 2)

ご存じ風車.組み合わせの良問でもあり, 有名な問題です.2 番級にしては難しいという前情報を知っていたので, 力試しのつもりで解いてみる.
この問題について, 先輩から「点の数が一定だよ」みたいなヒントをいただいていたので, まずそれがどういうことかを考えてみる.S がすべて凸包の頂点とかだとさすがにこの主張って自明 (この凸包を直線がぐるっと一回転してすべての点を無限回通ってくれる) なので, 四角形の中に 1 点加えた 5 点について, 具体的に風車を試してみると, なるほど直線の片側について, 点の数が一定だ.だって一回の風車の操作で一個の点が増えて, 一個の点が減る, もしくは点の数が変わらない, みたいな感じで, 時計回りに回していってぶつかる点が, 点の数を数えてる側か逆側かのどっちにあるのかの二つの場合について点の数が変わらないことが言えると.
でもこれがどう生きるのかを考える.とりあえず最初の点 P と直線 l を, 片側の点の数を 0 みたいにするのがやばいみたいなのは分かる.だって内部の点で, 片側 0 の直線が存在しない例って簡単に作れるからね.そうすると点の数を半分にするのが丁度いい？
とりあえず S が $2n+1$ 個の点集合だとして, n 個 n 個に点が分けられる直線ってあるか考えると $\cdots$ あ, 絶対存在するじゃん!だってある点を固定して, その点を通る直線を回転させていくと, まずどっかで k 個, $2n-k$ 個に分けられたとすると, でずっと回転していって半回転すると $2n-k$ 個と k 個に分かれ方が変わるけど, この変化って, 1 ずつ変わっていく (その直線を回転して, ある点を通過するときに値が変わるから）だけだから, 中間値の定理で, k と $2n-k$ の間に必ず n, n に分ける直線があると, なるほどこれはどの点についても成り立つよね, かなりいい感じな気がする.
この流れでいけちゃいそうだったんで, 点の数が奇数の時に頑張って示そうといてみる.さっきの 5 個の点で実験してみたところ, どの点から始めても ok なことに気付く, それはよく考えたら当たり前で, どっかの点から始まる風車がどの点も通るなら, その途中で出てくる点と直線についても題意は成り立ってるから.つまり内部の点というのはあまり本質でなさそうなことに気付いた.とりあえず, どっか適当な点と, 残りの $2n$ 個の点を n, n に分ける直線（上の議論から必ずある) から始める風車がどうなるかを調べる.
あれ?これって絶対無限個の点を通る気がしてきた.$2n$ 個の点を時計回りに $p_1, p_2, \cdots p_{2n}$ と名付けて, 直線で p_1 から p_n と p_n+1 から p_{2n} に分けられてるとして, いろいろ場合分けして, p_1 から p_2n まで全部通ることを示そうとしたけど, うまくいかない $\cdots$ でも, 最初の直線が, 回っていって半回転した時は, 最初の点 P を通るよね, だって n, n に分けるのは不変であることを考えると, その直線に平行で $2n+1$ 点のうち 1 点を通って残り

の $2n$ 点を半分に分けるのは, 高々一つしかないから, とりあえず戻ってくることは分かる.でも他の点でできず悩む (ここで 30 分くらい試行錯誤した)
ここで閃く.さっきの議論って他の点にも使えるじゃん!!つまり, 任意の点について, n, n に分ける直線がある.じゃあ風車で直線が回転していってその直線に平行になった時, この点を通るじゃん!!なるほど,「点の数が一定」というのはそういうことなのか, すごく綺麗にどの点も通ることが示せて, この直線が半回転するとまた元の点を通るから, それを使うと直線の一回転ごとにどの点も 2 回, 風車の中心になる.繰り返すと無限回通ると, なるほど示せましたね.
点の数が偶数の時はどうするんだろう, でもさすがに同じようにできそう.とりあえず $2n$ 点としておく, この時, $n, n-1$ 点ずつ分ける直線があることが分かる.証明はほぼ同じように出来る.とするともういけんじゃね?任意の点について $n, n-1$ 点に分ける直線がある.さっきと違って半回転だと, 直線のサイドが変わっちゃうのでダメだけど,「一回転してくると」その直線は必ず元の点を通る.だから, 点の数が偶数の時も言えた, これで全部の時に言えた, やったぜ解けた.

感想
組み合わせの問題はどうしても文が長くなる $\cdots$, 特に組み合わせは採点が厳しいと思うので, みなさん慎重に書いてくださいね $\cdots$
この問題は, やはり「直線の片側について, 点の個数は変わらない」と,「点を半分に分ける直線が存在する」の二つがキーポイントでしょう, 私は一方をすでに知っていましたが, もし両方分からなければかなり苦戦するのではないでしょうか, 逆に言うとこういうところに部分点が転がることもあるので, 問題について成り立ちそうで, かつ解くのに有効な補題を考えるというのもいいのかもしれません.ともかく, 様々な考察を要求する難問であることは間違いないと思います.
余談ですが, *shortlist* に載っている模範解答も見ましたが, ほぼ同じ解答でした.

15. P, Q を互いに素な実数係数の多項式で, 定数関数でないものとする.この時, $P+\lambda Q$ がある実数係数の多項式の二乗となるようなλは高々 3 つしかないことを示せ.($USA\ Team\ Selection\ Test$ 2017 3)

(以後, 多項式で P と Q が $modR$ で合同というのを, $P-Q=aR$(ある実数 a) になる時に使うとする.) 超楽しそうな *the*・代数の問題, 整数論にも似たような問題がある (平方数からなる 4 項の等差数列は自明なものしかない) というのを思い出した.問題文を見た感じ 2 つしかないのかなぁとか思ったけど, 3 つっていうのを見ると具体例があるのか?探してみる.
$P+\lambda_i Q=R_i^2$みたいにしておく.こうすると R_i^2って $modQ$ で合同みたいな感じになる.そうするとλの個数と i の個数が対応してるから, i の最大値を考えれば $ok.P$ はあんまり本質でないよね.うまく言い換えられた気がする.こうしてみると $i=2$ は絶対可能だな, $i=3$ について調べてみる.
$(R_1+R_2)(R_1-R_2)=a_1Q, (R_1+R_3)(R_1-R_3)=a_2Q(a_1$と a_2は実数) これを満たす多項式を調べたい.Q を因数分解して $Q_1Q_2\cdots Q_k$とおいて, うまく R_1+R_2と R_1-R_2に配分できるかを考える.$Q=x(x+1)(x+2)(x+3)$ として, うまく二つずつ分配してみる.$R_1=2x^2+6x+3.R_2=x^2+3x+3, R_3=2x+3$ でいけた.案外 $i=3$ だと問題なくいけたけど, $i=4$ だとどう問題が出てくるのかな?とりあえず $(R_1+R_4)(R_1-R_4)=a_3Q$ という式を追加して, 三つの式から矛盾を導きたい.
Q を因数分解して出てくる多項式の集合 $S=Q_1Q_2\cdots Q_k$とおき, R_1+R_2を因数分解して出てくる多項式の集合を A, 同様に R_1+R_3, R_1+R_4について B, C とおく.この時 $A, B, C\subset S$ で, R_1-R_2についても, A の補集合みた

いなことも分かる.
ここで閃く.$R_2+R_3=(R_1+R_2)-(R_1-R_3)=(R_1+R_3)-(R_1-R_2)$ とおけるから,R_2+R_3は $(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$ を含む.同じ議論を R_2-R_3についても,この補集合を含む.ここで $(R_2+R_3)(R_2-R_3)$ が Q の定数倍だから,この包含関係は実はイコール,かなりいい感じがする.とりあえずいいところまでいったので,一旦リセットして明日考えることにする.
さて,考える.次数を見たい.見た感じ次数が全部一緒?とりあえず Q_iの次数は確定しないから,幅があるので,別の考え方でいこう.単純に R_1から R_4の次数が全部同じ時と違う時に分ける?同じときって次数は Q 以上だよね,とりあえず Q より大きい時試してみたい.
R_1から R_4の次数を a として,Q の次数を $k(<2a)$ とする.すると R_1+R_2と R_1-R_2のどっちかの次数は a でどっちかの次数は $k-a$,この場合じゃ $i=3$ でも無理かな?って思ったけど $R_1=x^2+4x+2, R_2=x^2+2x+2, R_3=x^2-2$ でいけちゃった.やばいと思って方針を変える.
いろいろ調べた感じ Q の因数を全部出すのは筋が悪そう.Q の因数の多項式の内,R_1+R_2と R_1+R_3を両方割り切る（最大公約多項式みたいなの）のを Q_1,同様に Q_2,Q_3,Q_4をそれぞれ R_1+R_2と R_1-R_3, R_1-R_2と R_1+R_3, R_1-R_2と R_1-R_3の共通する因数みたいにおく.とりあえず $i=3$ の時に絞れる議論をしたい.
ここで気付く.Q_1,Q_2,Q_3って,それぞれうまく定数倍してやると $modQ_4$で一緒になる.R_2とかって -1 倍とかしても対称性から成り立つから,上の補題的なのはサイクリックに使える.上の二つの具体例って $x,x+1,x+2,x+3$ と $x,x+1,x+2,1$ なんだけど,この時おｋなのは調べたら分かる.と思ってこの 4 つの組を考えようとしたけど,よく考えるとこの性質って,サイクリックとかじゃなくて,一つの多項式の mod で他の 3 つの多項式を見るだけで ok,それは一次結合みたいなことを考えれば分かる.じゃあもう実数を適当に掛けて Q_1,Q_2,Q_3が $modQ_4$で一緒みたいな感じに考えればいいよね,で実験してみると,$R_1+R_2=Q_1Q_2, R_2+R_3=Q_2Q_3, R_3+R_1=Q_3Q_1$になることが分かるから,こっから R_1,R_2,R_3が一意に定まる (定数倍の不定性はあるけど)!!かなりいい気がする.とりあえず $i=3$ の時の考察を終わりにして,$i=4$ での矛盾を示していく.
多項式で mod??みたいなのって厳密性に欠けるので,とりあえず,$\frac{P-Q}{Q-R}$が実数になるような P,Q,R を良い列と定義しておく.示すべきことは,どの二つも異なる多項式 R_1,R_2,R_3,R_4と二つの良い列 A,B,C A',B',C'があって

$$R_1+R_2=AB, R_2+R_3=BC, R_3+R_1=CA, R_1+R_2=A'B', R_2+R_4=B'C', R_4+R_1=C'A'$$

となるものはないことと言い換えられた.かなりいい気がする.自明に $AB=A'B'$,これを使ってうまくこねくり回して矛盾を言いたい.R_3とか R_4とかあるけど,結局本質の式って（$(A-B)C=(A'-B')C'$だよね,この二つの式が本質っぽいので,この二つから矛盾を生じさせるのを目標にする.
$A=B', B=A'$の時は式変形をすると $A=B$ になって,結局 $R_3=R_4$になって矛盾.入れ替えるとかだとさすがにだめだなぁ・・・とか考えるけど,全然うまくいかない・・・
ここで閃く!!$A=KL, B=MN, A'=KM, B=LN$ と,K,L,M,N のどの二つも互いに素になるようにおくと,実数 a,b と分数関数Ｆを使って $F\cdot(KM-LN)=(a+1)KL-aMN, F\cdot(KL-MN)=(b+1)KM-bLN$ とおけるけど,和と差をとればすごくいい感じでは?とりあえず前者の式から後者の式を引いて $F\cdot(K+N)(M-L)=(a-b)(KL-MN)+((b+1)K+bN)(L-M)$(1 とする),和をとって $F\cdot(K-N)(M+L)=(a-b)(KL-MN)+((b+1)K-bN)(L+M)$(2 とする),これ $KL-MN$ が $M-L, M+L$ をそれぞれ割り切れるかを見たい.
$KL-MN$ が $L-M$ で割れないとまずそうと思いつつ見る.もし割れないとする.すると F の分数に $(L-M)$ が出てこないから,差をとった式を見て,$L-M$ が $(a-b)(KL-MN)$ を割り切るから,$a=b$,さすがに無理だと思って矛盾を示そうとしてみると,1 の両辺を $M-L$ で引いて (M と L が互いに素なので $M\neq L$)$F\dot{(}K+N)=$

$-((b+1)K+bN)$, 2 の両辺を $M+L$ で引いて $F\dot{(}K-N)=(b+1)K-bN$, すると $K+N, K-N$ のどっちが定数関数じゃないとすると, M と N が互いに素という条件と矛盾するので, K, N は定数関数, もう矛盾示せそう, この時 F も定数関数.すると M, N が比例みたいな感じになって, 結局互いに素という条件から M, N も定数関数すると R_1から R_4も全部定数関数になって, 問題文に矛盾, よって $KL-MN$ は $L-M$ で割れる.同じように $KL-MN$ は $L+M$ で割れることが分かる.M と L が互いに素なので, 結局整理すると, $K-N$ が $L-M$ で割れて, $K+N$ が $L+M$ で割れる.多項式 X, Y を使って $K+N=2X(L+M), K-N=2Y(L-M)$ とおける.$K=(X+Y)L+(X-Y)M, N=(X-Y)L+(X+Y)M$, これを元の式に入れて整理して ($F$ は置きなおしています) $-F\cdot(X-Y)=a(X+Y)(L^2-M^2)+KL, F\cdot(X-Y)=-b(X-Y)(L^2-M^2)+KM$(最後の項の K にも代入すると式が汚くなるのでやめました).ここで X と Y は互いに素だから $X+Y$ と $X-Y$ も互いに素.だから F って実はこれも多項式になると, かなりいい気がする.K と N が互いに素だから X と $L-M, Y$ と $L+M$ の二組も互いに素.次数について考えてもうまくいかず, 悩む.
ここで閃く!!さっきみたいにこの二つの式の和と差をとってみると, F って $L-M$ と $L+M$ の両方の倍数になってることが分かる!!すると K も $L-M$ と $L+M$ の倍数!!さすがに矛盾じゃね?と思って調べると, $Y(L-M)$ が $L+M$ の倍数になることになって, 結局 $L+M$ が定数関数になる!!同じように $L-M$ も定数関数になって, 結局 L, M はともに定数関数!!すると一つ目の式から $X+Y$ が $X-Y$ の倍数になり, 二つ目の式から $X-Y$ が $X+Y$ の倍数.じゃあ結局 X と Y が互いに素という条件から X と Y が定数関数.じゃあ K, N も定数関数!!じゃあさっきと同じで矛盾が示せましたね.いやーほんとに長かったけど, 解けました!!

感想
シンプルさ, 綺麗さ, そして難しさがすべてあって, 正直 IMO の 3 番級にあっても遜色ない超良問でしょう. かなり脇道にそれてしまった上泥臭い方法をとってしまったために, 解ききるにはおよそ 10 時間ほど要しました. 最近解いた問題で一番難しく苦労した問題だと思います. 主張の綺麗さからここまで難しいものを要求される問題は最近ほとんど見ないので, 本当に素晴らしい問題だったと思います.
とても難しい問題ですが,IMO3 番級を解くくらいの意気込みの人には是非解いてもらいたい超難問だったのと, 解いた後の感動が素晴らしかったので, 解いてみた集にカウントしました.
なお, 微分を使った素晴らしい解答もあり, 感動しました. もし見たければ Aops で調べてみてください.

16.実数について定義され実数値をとる関数 f であって, 任意の実数 x, y について

$$f(xf(x+y))=f(yf(x))+x^2$$

が成り立つものを全て求めよ ($IMO2009shortlistA7$)

$A7$ だけどシンプルでめちゃくちゃ楽しそうな関数方程式, 腰を据えて解きます.
とりあえず 0 を代入してみる.
与式に $x=0\to f(0)=f(yf(0))$ $f(0)\neq 0$ なら $yf(0)$ は任意の実数値をとるので $f(x)$ は定数関数になるけどこれは明らかに無理.$f(0)=0$
ｆの中に 0 が出てくる代入をしてみる.与式に $y=0\to f(xf(x))=x^2$ この式は使えそうなので, この式を 1 としておきますか.
与式にｙ $=-x\to f(-xf(x))=-x^2$ 同様にこの式を 2 としてみる.
１と２から $f(x)$ って正の値も負の値もとりうるから全射, これは結構大きいのでは?

$f(a)=0$ なら, 1 に $x=a$ を代入して $a^2=0$ だから $a=0$, よって零点をとるのは 0 だけ.かなりいい感じな気がする.
同じ感じで単射も示したいなぁと考える.解いてる時はここで少し止まった.$f(a)=f(b)$ として, うまい代入をして比較ができればいいのになぁと思うが悩む.
ここで閃く.零点の一意性を使うと, $f(?)=x^2$みたいな項を作れば, 残りの項が 0 になってくれて超うれしいことが起こりそう.
具体的にやってみる.$f(af(a+b))=a^2(a\neq 0)$ とすると, 与式に $x=a, y=b$ とすると $bf(a)=0, a\neq 0$ より $f(a)\neq 0$ だから $b=0$.何が言いたいかというと, f って全射だったから, a だけ固定して b は任意の実数をとりうるので $af(a+b)$ って全実数を動くんだけど, その中で関数の値を決めると b が一つに限定されるってことは, ようするに $f(x)=a^2$となる x って高々一つだよね.
同様に $f(bf(a))=-a^2$とすると $b=-a$ が得られるから, 結局全実数について $f(x)$ って単射.かなり珍しい示し方だった気がする.
これで f が全単射が示せた. 1 に $-x$ を入れた式と元の式を比べて $xf(x)=-xf(-x)$, $x\neq 0$ なら f は奇関数だけど, $f(0)=0=-f(0)=-f(-0)$ だから, 結局全実数について $f(x)=-f(-x)$ まで分かった
かなりいい感じのところまで進んだ気がするけど, 先はまだまだありそう.とりあえず今日はここで寝る.
1 日空いたが, また考える.$f(xf(y))=xy$ みたいなのを目標にしたい.というかこれが示せれば $f(x)=ax$ で, $a^2=1$ から $f(x)=x,-x$ という解が出てくるから, この式が出れば勝ち.どうにか与式に代入をしてこねくり回してこの式を導きたい.
特別な場合 ($x=y$ とか $x=0$ とか) は成り立っているから, とりあえずこの式は成り立ちそう.これが任意の実数で言いたいんだけど, xy って言う項は与式から出てきそうにない.ここで止まる.
ここで思いつく.$2xy=(x+y)^2-x^2-y^2$だよね.これは大きい気がする.つまりは与式の x に $x+y, x, y$ を代入して足し引きすれば ok?
実験してみる.ここでの y って与式の y と区別したいから.z としておく.
与式の x に $x+z\to f((x+z)f(x+y+z))=f(yf(x+z))+(x+z)^2$(以後 1 番目の式)
与式の x に $z\to f(zf(y+z))=f(yf(z))+z^2$(以後 2 番目の式)
これと与式 $f(xf(x+y))=f(yf(x))+x^2$(以後 3 番目の式) を組み合わせたい.
y は今固定されてないから, それぞれの式について y にうまく代入して足し引き (1 番目だけ足して 2 番目と 3 番目の式を引くのが一番いい) して $f(xf(z))$ だけ残るといいなぁと思いつつ考える.
とりあえずこの項を残したいと考えると, 2 番目の式に $y=x$ を代入しておくのが良さそう?すると $f(zf(x+z))$ の項が残すから, それを残りの式でも出して相殺させたい.一番目の式に $y=z$ を代入してみて試行錯誤したけどうまくいかないなぁ$\cdots$
ここでひらめく.1 番目は引くんだから, $y=-z$ の代入がめっちゃ良さそう.だって f って奇関数だから -1 倍が消えてちゃんと相殺してくれそう.代入してみるといろいろ消えてくれそう!!すると $f((x+z)f(x))$ が残る.じゃあ同じ理由で 3 番目に $y=-(x+z)$ を代入すると, いい気がしてみた.
整理する.1 番目の式に $y=-z$, 2 番目の式に $y=x$, 3 番目の式に $y=-(x+z)$ を代入して
$f((x+z)f(x))=-f(zf(x+z))+(x+z)^2$
$f(zf(x+z))=f(xf(z))+z^2$
$-f(x(z))=-f((x+z)f(x)+x^2$
これで 1 番目の式を足して 2 番目の式と 3 番目の式を引くと$\cdots$おお!!$2f(xf(z))=2xz$!!じゃあ $f(xf(z))=xz$ じゃん!!これ目標の式だよね!!これで求める関数 $f(x)$ は $x,-x$ だけだと分かった!!やったぜ 3 番級の問題が解け

たぜ！

感想

めっちゃくちゃ楽しくて, 解いた後めちゃくちゃハイテンションになってた.すごくシンプルで必要とする知識もないし, 最近解いた関数方程式のなかで, 難易度含め一番良問だと思い載せることにしました.
全射, 単射, 奇関数など, 関数方程式を解く上で必要なステップがすべて凝縮されており, 目標とすべき式 ($f(xf(y)) = xy$) も自然だし, 難しくはあるものの, 是非とも, 関数方程式を解きなれた人にとっても解いてもらいたい, おすすめの問題です.

9　あとがき

非常に長くなってしまいましたが,JMO 予選の 8 問と, 僕の印象に残った 8 問の合計 16 問を載せきることができました. 実は, この部誌を書いてる最中に, 国際数学オリンピックの日本代表になることが決まりました. これも, この部誌を書くために問題を解いたのが力になったのだと思います.
実はあと 8 問執筆する予定だったのですが, 紙面の都合上泣く泣く諦めました.
数学オリンピックに挑戦している中高生は今たくさんいらっしゃると思いますが, やっぱり言いたいのは, 何よりも一番の対策は, 問題を解きまくることです.Aops(Art of problem solving) というサイトの community というところで（英語ですが）たくさんの問題がのっているので, 解答を見る前に解いていけば, 必ず力が付くと思います.
あくまでここれは「どのような過程で問題を解くのか」を載せたのであって, たくさんの問題を解くという目的にあった部誌ではありませんが, 参考にしてもらえば幸いだと思います.
もし部誌の内容について質問などがある方は,（おそらくいると思うので）是非僕に聞いてください.
それでは, この長い部誌を読んでいただき, まことにありがとうございました!!

10　参考文献

小林一章監修『獲得金メダル!国際数学オリンピック』