多項式関数の性質

黒木 亮汰

1 はじめに

この記事では $\mathbb{R}_{\geq 0}$ への写像を用いて多項式関数の写し方の特徴を調べます．関数は定数でない多項式関数とし，(a_i) で i 成分が a_i の $n+1$ 次数ベクトルを表します (但し成分は 0 成分から n 成分まで)．(a_{ij}) で，ij 成分が a_{ij} の $n+1$ 次正方行列を表します (成分は 00 成分から nn 成分まで)．

2 準備

補題 2.1 (Vandermonde の行列式)**.** $A = (a_i^j)$ について，$\det A = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)$

証明. [1] 2.5 参照

定義 2.2 (余因子)**.** $A = (a_{ij})$ について，

$$A_{ij} := (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0\ j-1} & a_{0\ j+1} & \cdots & a_{0n} \\ & \cdots & & & \cdots & \\ a_{i-1\ 0} & \cdots & a_{i-1\ j-1} & a_{i-1\ j+1} & \cdots & a_{i-1\ n} \\ a_{i+1\ 0} & \cdots & a_{i+1\ j-1} & a_{i+1\ j+1} & \cdots & a_{i+1\ n} \\ & \cdots & & & \cdots & \\ a_{n0} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

補題 2.3 (余因子展開)**.** 定義 2.2 の状況で，

$$\sum_{k=0}^{n} a_{km} A_{kl} = \begin{cases} 0 & (m \neq l) \\ \det A & (m = l) \end{cases}$$

証明. [1] 2.3.1 参照 □

系 2.4.

$$\sum_{k=0}^{n} \left(a_k^m (-1)^{n+k} \prod_{0 \leq i < j \leq n,\ i,j \neq k} (a_i - a_j) \right) = \begin{cases} 0 & (0 \leq m < n) \\ \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j) & (m = n) \end{cases}$$

証明. 2.3 に $A = (a_i^j)$，$l = n$ を代入して

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^m A_{kn} = \begin{cases} 0 & (0 \leq m < n) \\ \det A & (m = n) \end{cases}$$

なので 2.1 より示せた． □

系 2.5. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について，

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x-k)^m = \begin{cases} 0 & (0 \leq m < n) \\ n! & (m = n) \end{cases}$$

証明. 2.4 に

$$a_k = n - k$$

を代入し,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left((n-k)^m(-1)^{n+k}\prod_{0\le i<j\le n,\ i,j\ne k}(j-i)\right) &= \begin{cases} 0 & (0\le m<n) \\ \displaystyle\prod_{i<j}(j-i) & (m=n) \end{cases} \\
(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k k^m((n-k)!k!)^{-1}\right)\prod_{j=1}^{n} j! &= \begin{cases} 0 & (0\le m<n) \\ \displaystyle\prod_{k=0}^{n} k! & (m=n) \end{cases} \\
\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k k^m\frac{n!}{(n-k)!k!}\right)\prod_{j=1}^{n-1} j! &= \begin{cases} 0 & (0\le m<n) \\ \displaystyle(-1)^n\prod_{k=0}^{n} k! & (m=n) \end{cases} \\
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^m &= \begin{cases} 0 & (0\le m<n) \\ (-1)^n n! & (m=n) \end{cases}
\end{aligned}$$

なので, $0 \le m \le n$ とすると

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x-k)^m &= \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}x^l(-k)^{m-l}\right) \\
&= (-1)^m\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^m + \sum_{l=1}^{m}\left(\binom{m}{l}(-x)^l\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^{m-l}\right)\right) \\
&= (-1)^m\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^m \\
&= \begin{cases} 0 & (0\le m<n) \\ n! & (m=n) \end{cases}
\end{aligned}$$

□

ここでは工夫のない計算で示したが, [2] に微分を用いた簡潔な証明がある.

定義 2.6 (Chebyshev 多項式)**.** 漸化式

$$\begin{cases} f_0(x) = 1 \\ f_1(x) = x \\ f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x) \end{cases}$$

を満たす $\mathbb{Z}$ 係数多項式列 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}}$ が一意に存在し,

$$\begin{aligned}
\cos(n+1)x &= \cos nx\cos x - \sin nx\sin x \\
\cos(n-1)x &= \cos nx\cos x + \sin nx\sin x
\end{aligned}$$

より

$$\cos(n+1)x = 2\cos nx\cos x - \cos(n-1)x$$

なので, ($f_0(\cos x) = 1 = \cos 0, f_1(\cos x) = \cos x$ より)

$$f_{n+1}(\cos x) = 2\cos nx\cos x - \cos(n-1)x = \cos(n+1)x.$$

補題 2.7. 任意の x について,

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\left(x-\cos\frac{k\pi}{n}\right)^m = \begin{cases} 0 & (0\le m<n) \\ (-2)^{2-n}n & (m=n) \end{cases}$$

証明． 2.6 の $f_n(x)$ について，

$$\cos nx = f_n(\cos x) = (\text{最高次の係数が } 2^{n-1}\text{の } \cos x \text{ の } n \text{ 次多項式}).$$

つまり，

$$\begin{aligned} 2^{n-1}\cos^n x &= \cos nx + (\cos x \text{ の } n-1 \text{ 次多項式}) \\ \cos^n x &= 2^{1-n}\cos nx + (\cos x \text{ の } n-1 \text{ 次多項式}) \end{aligned}$$

で，

$$\cos 0 = 1$$

なので，帰納的に ($\cos x$ の $n-1$ 次多項式) を次数の高いものから分解して，定数項を $\cos 0$ を用いて変形すると

$$\cos^n x = 2^{1-n}\cos nx + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cos jx$$

という表示を得る．但し，a_j は j, n に依存する定数．ここで，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2km\pi}{n} &= \begin{cases} n & (n|m) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \\ \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{(2k-1)m\pi}{n} &= \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{n}}n & (n|m) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \end{aligned}$$

より

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\cos\frac{km\pi}{n} = \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2km\pi}{n} - \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{(2k-1)m\pi}{n} = \begin{cases} 2n & (2|(\frac{m}{n}-1)) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

なので，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\left(x-\cos\frac{k\pi}{n}\right)^m &= \sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^k\sum_{l=0}^{m}(-1)^{m-l}\binom{m}{l}x^l\cos^{m-l}\frac{k\pi}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(-1)^m\cos^m\frac{k\pi}{n} + \sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^k\sum_{l=1}^{m}(-1)^{m-l}\binom{m}{l}x^l\cos^{m-l}\frac{k\pi}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{k+m}\cos^m\frac{k\pi}{n}\right) + \sum_{l=1}^{m}\left((-1)^{m-l}\binom{m}{l}x^l\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\cos^{m-l}\frac{k\pi}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{k+m}2^{1-m}\left(\cos\frac{km\pi}{n} + \sum_{h=0}^{m-1}a_h\cos\frac{kh\pi}{n}\right)\right) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{m}\left((-1)^{m-l}\binom{m}{l}x^l\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\sum_{j=0}^{m-l}b_j\cos\frac{kj\pi}{n}\right) \\ &= (-1)^m2^{1-m}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\cos\frac{km\pi}{n} \qquad (0\le m\le n \text{ とした}) \\ &= \begin{cases} 0 & (0\le m<n) \\ (-2)^{2-n}n & (m=n) \end{cases} \end{aligned}$$

□

補題 2.8.

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\left(x-e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)^m = \begin{cases} 0 & (0\le m<n) \\ 2n & (m=n) \end{cases}$$

証明.

$$\sum_{k=1}^{n} e^{i\frac{2km\pi}{n}} = \begin{cases} n & (n|m) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} e^{i\frac{(2k-1)m\pi}{n}} = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{n}} n & (n|m) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

より

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k e^{i\frac{km\pi}{n}} = \left(\sum_{k=1}^{n} e^{i\frac{2km\pi}{n}}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} e^{i\frac{(2k-1)m\pi}{n}}\right) = \begin{cases} 2n & (2|(\frac{m}{n}-1)) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

なので,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(x-e^{i\frac{k\pi}{n}})^m &= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}x^l(-e^{i\frac{k\pi}{n}})^{m-l} \\
&= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(-e^{i\frac{k\pi}{n}})^m + \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\sum_{l=1}^{m}\binom{m}{l}x^l(-e^{i\frac{k\pi}{n}})^{m-l} \\
&= (-1)^m\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k e^{i\frac{km\pi}{n}} + \sum_{l=1}^{m}\binom{m}{l}(-1)^{m-l}x^l\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k e^{i\frac{k(m-l)\pi}{n}} \\
&= \begin{cases} 0 & (0 \le m < n) \\ (-1)^n 2n & (m = n) \end{cases}
\end{aligned}$$

□

補題 2.9 (中間値の定理)**.** 有開閉区間 $I = [a, b]$ 上連続な関数 *f(x)* と $a \le c \le b$ について, $\xi \in I$ が存在して

$$f(\xi) = c$$

証明. [3] 1.35 系 1 参照 □

系 2.10. $f(x) = 0$ の解の個数を m, $f'(x) = 0$ の解の個数を n とおくと,

$$m \le n + 1$$

3 代数閉体上の多項式関数

(K, σ) を代数閉体 K と写像 $\sigma : K \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ の組とする. σ で多項式関数の像を追う. 代数閉体の性質から次が従う.

定理 3.1. σ が

- $\sigma(x) = \sigma(-x)$
- $\sigma(x)\sigma(y) \le \sigma(xy)$

を満たす時, 最高次の係数が a, 定数項が c の n 次多項式関数 $f(x) \in K[x]$ と $r \in K$ に対して $b \in K$ が存在して

$$\sigma(b) \le \sqrt[n]{\sigma(\frac{c-r}{a})},\ \sigma(f(b)) = \sigma(r).$$

証明.

$$f(x) - r = a\prod_{k=1}^{n}(x + d_k)$$

とおく. $x = 0$ を代入して

$$\prod_{k=1}^{n}\sigma(d_k) \le \sigma(\prod_{k=1}^{n} d_k) = \sigma(\frac{c-r}{a})$$

なので, ある i について

$$\sigma(-d_i) = \sigma(d_i) \leq \sqrt[n]{\sigma(\frac{c-r}{a})},\ \sigma(f(-d_i)) = \sigma(r)$$

□

定理 3.2. σ が

- $\sigma(x) = \sigma(-x)$
- $\sigma(x)\sigma(y) \geq \sigma(xy)$

を満たす時, 最高次の係数が a, 定数項が c の n 次多項式関数 $f(x) \in K[x]$ と $r \in K$ に対して $b \in K$ が存在して

$$\sigma(b) \geq \sqrt[n]{\sigma(\frac{c-r}{a})},\ \sigma(f(b)) = \sigma(r).$$

証明. 同様 ($\leq$ を $\geq$ に) □

代数閉体でなくても $f(x) - r$ が分解できれば良く, $\mathbb{Q}$ と $\overline{\mathbb{Q}}$ などでも同様の議論ができて σ に次数や高さを使うと面白そうだがここでは割愛する.

例 3.3 $((K,\sigma) = (\mathbb{C}, |\cdot|)$ の場合)**.** 定数項が c の n 次モニック多項式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ と $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して $b \in \mathbb{C}$ が存在して

$$|b| \leq \sqrt[n]{s},\ |f(b)| \geq s.$$

$2s \geq |c|$ の時, $d \in \mathbb{C}$ が存在して

$$|d| \geq \sqrt[n]{s},\ |f(d)| \leq s.$$

特に $c = 0$ の場合,

$$|b| \leq \sqrt[n]{s},\ |f(b)| = s,\ |d| \geq \sqrt[n]{s},\ |f(d)| = s$$

となる $b, d \in \mathbb{C}$ が存在する.

証明.

(i) $c \neq 0$ の場合
3.1 に $r = c + \frac{cs}{|c|}$ を代入して

$$|b| \leq \sqrt[n]{s},\ |f(b)| = \left|c + \frac{cs}{|c|}\right| = \left|c(1 + \frac{s}{|c|})\right| \geq \left|\frac{cs}{|c|}\right| = s$$

となる b が存在する. $2s \geq |c|$ の時 $\frac{s}{|c|} \geq \frac{1}{2}$ で, 3.2 に $r = c - \frac{cs}{|c|}$ を代入して

$$|d| \geq \sqrt[n]{s},\ |f(d)| = \left|c - \frac{cs}{|c|}\right| = \left|c(1 - \frac{s}{|c|})\right| \leq \left|\frac{cs}{|c|}\right| = s$$

となる d が存在する.

(ii) $c = 0$ の場合
3.1, 3.2 に $r = s$ を代入すれば良い.

□

例 3.4 (幾何的意味)**.** $\mathbb{R}^m (m \geq 2)$ の元を n 個とる (重複を許す). 原点からの距離が $\sqrt[n]{s}$ 以下の元 a からそれらの点までの距離の積をとった時, a を動かした時の積の最大値は s 以上. (原点を n 個とった時に最大値 s)

証明. $m = 2$ の場合, 複素平面とみなして取った元を $\mathbb{C}$ の元 $b_1, ..., b_n$ とみなすと, 積は

$$\prod_{k=1}^{n} |(a - b_k)| = \left|\prod_{k=1}^{n} (a - b_k)\right|$$

なので 3.3 より示せた. $m \geq 3$ の場合, $\mathbb{R}^m \supset \mathbb{R}^2$ より示せた. □

例 3.5. $x \in \mathbb{C}$, $|x| \leq \sqrt[n]{s}$ で, $(1, x, x^2, ..., x^n)$ 又は $(-1, -x, -x^2, ..., -x^n)$ という形に表せる点の集合を A とする. A から有限個の元を取り (同じものを何度取っても良い), それらの重心の第 $n+1$ 成分以外が 0 となった時, 第 $n+1$ 成分の最大値は 1, 最小値は -1.

証明. 後述 4.7 同様. □

4 $\mathbb{R}$ 上の多項式関数

$\mathbb{R}$ の性質上, 解析的考察が自然.

定理 4.1. n 次モニック多項式 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ と長さ $n+1$ の真の減少列 $\{a_k\}_{0 \leq k \leq n} \subset \mathbb{R}$ に対して k が存在して

$$|f(a_k)| \geq \alpha$$

但し,

$$\alpha := \left(\sum_{k=0}^{n} \left((-1)^k \prod_{j \neq k} (a_k - a_j)^{-1} \right) \right)^{-1}$$

等号成立は

$$f(x) = g(x) := \alpha \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \prod_{j \neq k} \frac{(x - a_j)}{(a_k - a_j)} \qquad \text{(Lagrange 補間)}$$

証明. g の最高次の係数は

$$\alpha \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^k \prod_{j \neq k} (a_k - a_j)^{-1} \right) = 1$$

なので, $g(x)$ は $x = a_k$ で $(-1)^k \alpha$ をとる, n 次モニック多項式関数. ここで任意の k に対して

$$|f(a_k)| < \alpha$$

と仮定すると $g(x) - f(x)$ の符号は $x = a_k$ で $(-1)^k$ なので, 2.9 より n 個以上根を持つが, $g(x) - f(x) \neq 0$ は高々 $n-1$ 次なので矛盾. よって示せた. □

系 4.2. 長さ $n+1$ の真の減少列 $\{a_k\}_{0 \leq k \leq n} \subset \mathbb{R}$ について,

$$\sum_{k=0}^{n} c_k a_k^i = 0 \qquad (0 \leq i < n)$$

ならば

$$\sum_{k=0}^{n} c_k a_k^i = \alpha \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k \quad (i = n)$$

証明. $A = (a_i^j)$ とおく. 4.1 より (d_i) を g の x^i の係数で定めると, g は n 次モニックなので $d_n = 1$. $0 \leq k \leq n$ に対して

$$a_k^n + \sum_{i=0}^{n-1} d_i a_k^i = (-1)^k \alpha.$$

c_k 倍の和をとって

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} c_k \left(a_k^n + \sum_{i=0}^{n-1} d_i a_k^i \right) &= \sum_{k=0}^{n} c_k (-1)^k \alpha \\
\sum_{k=0}^{n} c_k a_k^n + \sum_{i=0}^{n-1} d_i \sum_{k=0}^{n} c_k a_k^i &= \alpha \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k \\
\sum_{k=0}^{n} c_k a_k^n &= \alpha \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k
\end{aligned}$$

□

例 4.3. 長さ $n+1$ の減少列 $(a_0, a_1, ..., a_n) = (n, n-1, ..., 0)$ を考えると,

$$\alpha = 2^{-n} n!$$

証明. 2.5, 4.2 より

$$n! = \alpha \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$
$$\alpha = 2^{-n} n!$$

□

有限個の点ではなく, 閉区間でも考えてみる. 発想としては, 有限個の場合の有限個の点が極値であれば閉区間でも同様の手法が使える.

系 4.4. 4.1 において

$$0 < \forall i < n \quad g'(a_i) = 0 \iff a_n \le |\forall x| \le a_0 \quad |f(x)| \le \alpha$$

証明. n 次多項式の極値は高々 $n-1$ 個なので, 4.1 から明らか. □

系 4.5. n 次モニック多項式 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ と $s \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ に対して $b \in \mathbb{R}$ が存在して

$$|b| \le \sqrt[n]{s}, \ |f(b)| \ge 2^{1-n} s$$

証明. f_n を Chebyshev 多項式とすると, 任意の $-1 \le x \le 1$ に対して

$$|f_n(x)| = |f_n(\cos(\arccos x))| = |\cos(n \arccos x)| \le 1$$

で, $f_n(x)$ は最高次の係数が 2^{n-1} の多項式なので

$$g_n(x) := 2^{1-n} f_n(x)$$

は n 次モニック多項式で, 任意の $|x| \le 1$ について

$$|g_n(x)| \le 2^{1-n}.$$

又, $g(x)$ は任意の $0 \le k \le n$ に対して, $x = \cos\frac{k\pi}{n}$ で $(-1)^k 2^{1-n}$ をとる, n 次モニック多項式関数. ここで任意の $0 \le k \le n$ に対して

$$|f(\cos\frac{k\pi}{n})| < 2^{1-n}$$

と仮定すると $g(x) - f(x)$ の符号は $x = \cos\frac{k\pi}{n}$ で $(-1)^k$ なので, 2.9 より n 個以上根を持つが, $g(x) - f(x) \ne 0$ は高々 $n-1$ 次なので矛盾. x を $\sqrt[n]{s}x$ と置きなおして s 掛ければモニックにできて, 同様に議論できる. よって題意が示せた. □

例 4.6 (幾何的意味)**.** $\mathbb{R}$ の元を n 個とる (重複を許す). 原点からの距離が $\sqrt[n]{s}$ 以下の元 a からそれらの点までの距離の積をとった時, a を動かした時の積の最大値は $2^{1-n}s$ 以上. ($\sqrt[n]{s}\cos\frac{\pi}{2n}, ..., \sqrt[n]{s}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}$ を一つずつとった時に最大値が $2^{1-n}s$ になる.)

証明. 3.4 同様 □

例 4.7. $x \in \mathbb{R}$, $|x| \le \sqrt[n]{s}$ で, $(1, x, x^2, ..., x^n)$ 又は $(-1, -x, -x^2, ..., -x^n)$ という形に表せる点の集合を A とする. A から有限個の元を取り (同じものを何度取っても良い), それらの重心の第 $n+1$ 成分以外が 0 となった時, 第 $n+1$ 成分として考え得る値の最大値は $|2^{1-n}s|$, 最小値は $-|2^{1-n}s|$.

証明.

$$a(x) := (1, x, x^2, ..., x^n),\ b(x) := -a(x) = (-1, -x, -x^2, ..., -x^n)$$

とする．条件を満たす点 $a(c_1 \sqrt[n]{s}), a(c_2 \sqrt[n]{s}), ..., a(c_i \sqrt[n]{s}), b(d_1 \sqrt[n]{s}), b(d_2 \sqrt[n]{s}), ..., b(d_j \sqrt[n]{s})$ を取ると，重心の第 $n+1$ 成分について，

$$\left| \frac{1}{i+j} \sum_{k=1}^{i} (c_k \sqrt[n]{s})^n + \sum_{k=1}^{j} (d_k \sqrt[n]{s})^n \right| = \left| \frac{1}{i+j} \left(\sum_{k=1}^{i} sg_n(c_k \sqrt[n]{s}) - \sum_{k=1}^{j} sg_n(d_k \sqrt[n]{s}) \right) \right| \leq 2^{1-n} s.$$

$1 \leq k \leq n$ に対して，

$$a(\sqrt[n]{s} \cos \frac{2k\pi}{2n}),\ b(\sqrt[n]{s} \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n})$$

で表される点の重心の座標の第 m 成分は，2.7 に $x=0$ を代入し，

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \left(\sqrt[n]{s} \cos \frac{k\pi}{n} \right)^m = \frac{(-\sqrt[n]{s})^m}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \left(-\cos \frac{k\pi}{n} \right)^m = \begin{cases} 0 & (0 \leq m < n) \\ 2^{1-n} s & (m = n) \end{cases}$$

なので条件を満たし，重心の第 $n+1$ 成分は $2^{1-n} s$.
$1 \leq k \leq n$ に対して，

$$a(\sqrt[n]{s} \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}),\ b(\sqrt[n]{s} \cos \frac{2k\pi}{2n})$$

で表される点の重心の座標の第 m 成分は同様に

$$\begin{cases} 0 & (0 \leq m < n) \\ -2^{1-n} s & (m = n) \end{cases}$$

なので条件を満たし，重心の第 $n+1$ 成分は $-2^{1-n} s$. 以上より示せた． □

5　一般の場合

ここまで多項式の次数と最高次の係数に縛りをかけていたが，より具体的に $f(x) = x^5 + ax$ のような縛りをかけてみる．証明はまだ思いついていないが見通しが立ったのでそれを書く．

補題 5.1. $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, 相異なる $a_0, ..., a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $c_1, ..., c_n$ が存在して

$$f(x) := x^{a_0} + \sum_{k=1}^{n} c_k x^{a_k}$$

について $\max_{|x| \leq s} |f(x)|$ が最小値をとる．又，$s, a_0, ..., a_n$ に依存する定数 c が存在して，そのような任意の $c_1, ..., c_n$ について $\max_j |c_j| < c$.

証明. $n = 0$ のとき明らかに正しい (c_kを選ぶ必要がない)．$n = k-1$ のとき $n = k$ のとき $s, c_1, ..., c_n$ 存在し $n = k$ のとき $c_1, ..., c_n$ が存在しないと仮定する．閉区間内であれば最小値が存在するので，存在しないという事はどれだけ大きい閉区間をとってもその中に最小値をとる $c_1, ..., c_n$ がない．つまり $\max_{|x| \leq s} |f(x)|$ は小さくなっていき，それにつれて $\max_j |c_j|$ が限りなく大きくなるということが可能である．しかし $n = k-1$ のとき条件を満たす c が存在するので，$\max_j |c_j|$ が限りなく大きくなると $\sum_{k=1}^{n} c_k x^{a_k}$ の $|x| \leq s$ での変動も限りなく大きくなり，$\max_{|x| \leq s} |f(x)|$ が小さくなることに矛盾する．よって $n = k$ のとき $c_1, ..., c_n$ は存在し，$\max_j |c_j|$ は限りなく大きくならないので c も存在する．帰納法より示せた． □

系 5.2. 5.1 において $s, a_0, ..., a_n$ を固定する．最小値を α とおくと，$f(x)$ について $b \in \mathbb{R}$ が存在して

$$|b| \leq s,\ |f(b)| \geq \alpha$$

予想 5.3. 5.1 において最小値をとる $c_1, ...c_n$ は一意的で, a_0 が偶数 (resp.奇数) なら最小値をとる $f(x)$ の極値は $0 < x \leq s$ では偶数 (resp.奇数) の $a_k \neq 0$ の個数と等しく, その絶対値は全て最小値をとる $f(x)$ に対する $|f(\pm s)|$, と等しい.

前章の様な具体的な値は得られず, 前章と同様の手法による証明には中間値の定理などを用いる必要があると考えている. 以下に有用そうな補題を書く.

補題 5.4. 相異なる $a_0, ..., a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, a_0 が偶数 (resp.奇数) なら

$$g(x) := x^{a_0} + \sum_{k=1}^{n} c_k x^{a_k}$$

について

$$\max_{|x| \leq s} |g(x)| \geq \max_{|x| \leq s} |f(x)|$$

但し, f は g の偶数 (resp.奇数) 次部分のみの関数.

証明. 任意の x について, a_0 が偶数なら

$$g(x) + g(-x) = f(x) + f(-x)$$

a_0 が奇数なら

$$g(x) - g(-x) = f(x) - f(-x)$$

で, f は偶関数 (resp.奇関数) より, 容易に示せる. □

補題 5.5. $a_0, ...a_n$ が相異なる非負の偶数 (resp.奇数) なら,

$$f(x) := x^{a_0} + \sum_{k=1}^{n} c_k x^{a_k}$$

の実解は高々 $2n+1$ 個.

証明. $n = 0$ の時, 実解は 0 のみで正しい. $n = j$ の時正しいとすると, $n = j+1$ の時, $g(x) := x^{-\min_k a_k} f(x)$ について $g'(x)$ の解は高々 $2j+1$ 個なので, 2.10 より $g(x)$ の解は高々 $2j+2$ 個. $f(x)$ の解は 0 を含めて高々 $2j+3$ 個で正しい. 以上より帰納法で示せた. □

これらは偶関数, 奇関数なので $x > 0$ の解は n 個.

6 おわりに

読んでいただきありがとうございました. この話題は中二, 中三でゼミを行った線型代数と実解析を使って何かできないかと考えて思いつきました. 時間があったので目標を設定せずに自分が面白いと思う方へ進んで行った事もあり, 非自明な結果は得られませんでしたが楽しかったです.

参考文献

[1] 永田雅宜 : 線型代数の基礎

[2] Sebastián Martín Ruiz : An Algebraic Identity Leading to Wilson's Theorem

[3] 笠原晧司 : 微分積分学