関数方程式入門

高校 2 年 4 組 34 番　藏田力丸

1　はじめに

本日は灘校文化祭にお越しいただきありがとうございます.

関数方程式とは, いくつかの関数のある点と他の点の値の関係を表す方程式のことを言います. まあ要は $f($ほげほげ$)$ みたいな形の項が入った方程式のことです (実際は方程式じゃない, 例えば不等式等の条件が与えられているような問題でも慣習的に関数方程式と呼んだりします). 本稿では, 数学オリンピックで見られるような関数方程式の問題について書きたいと思います. 関数方程式の問題は大学受験の問題でも見られますが, 微分可能性などが仮定されている場合が多く, 数学オリンピックのそれと比べやや解析的であると言えるでしょう. それに対し数学オリンピックにおける関数方程式は, より初等的で, それでいて奥が深いものとなっています.

本稿では, 関数方程式の多様な解法をなるべく体系的にまとめた, 言わば参考書のようなテイストに仕上げた (つもりの) 記事となっています. 他の記事とは雰囲気が異なりますが, 知識が皆無でも読めるように書いたので, 暇つぶしにでも読んでいただけたらと思います. 数オリに出場しない, といった方々も, 読んでいただけたら関数方程式の面白さを感じていただけるかと思います.~~なに?「獲得~~[*1]~~」があるからこんなもん要らんだって?うるせえな!~~

2　記号について

以下, よく使う記号について説明しておきます.

$\forall$(条件)…条件が満たされるすべての場合について

$\mathbb{R}$…実数の集合, 右下に値の範囲を書くこともある

$\mathbb{Q}$…有理数の集合

$\mathbb{Z}$…整数の集合

$\mathbb{N}$…正整数の集合 (ここでは 0 は含まないとします)

$x|y$…y が x で割り切れる $(x, y \in \mathbb{N})$

[*1] 「獲得金メダル! 国際数学オリンピック メダリストが教える解き方と技」朝倉書店・2011/11/25…数学オリンピック（JMO・IMO）出場者自身による，類例のない数学オリンピック問題の解説書.2009 年の第 50 回国際数学オリンピック・ドイツ大会の出発直前に行われた代表選手に対する合宿で使われた教材を下敷きとしている. 単なる「問題と解答」にとどまらず，知っておきたい知識や実際の試験での考え方，答案の組み立て方などにも踏み込んで高い実践力を養成する. 今までにはない進んだ内容.(Amazon.co.jp より抜粋. まあ実際この本はかなり普及してしまっていてもう「進んだ内容」とはとても言え…おっと, 誰か来たようだ.)

3　関数方程式って?

とりあえず問題を一つ見てみましょう.

例題　$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$　$f(x+y)=f(x)+f(y)(\forall x,y\in\mathbb{Z}),f(1)=1$ なる f を全て求めよ.

関数方程式の問題は,基本的に,与えられた式の x,y に適当な値を代入し,f を決定するのに必要な条件を探っていくところから始まります.この問題はとても初歩的で,y に 1 を代入すると $f(x+1)=f(x)+f(1)$ となり,漸化式のような式が得られます.したがって,$f(1)=1$ より $f(n)=n$ とわかりますね?$(n\in\mathbb{Z})$ よって ,$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ より $f(x)=x$ となります.

ここで必要なのが十分性の確認です. 関数方程式は, 基本的に与えられた式に適当な値を代入して得られる条件から解を探っていきます. したがって, 必要条件で絞っているわけなので, そうして決定された解は, 必ず与式を満たすという十分性の確認が不可欠になるわけです.

さて, 関数方程式を解く上で必要な, 主要な手法は以下の通りです.

- 解の予想
- 特殊な代入
- 全射性・単射性
- 定義域を $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{R}$ へ拡張
- Cauchy の関数方程式
- 不等式評価

以下各手法についてより細かく解説していきます.ただし,以下特に断りのない限り十分性の確認は省略するものとし,また $P(a,b)$ で与式の x,y に各々 a,b を代入した式を表すものとします.また,以下の問題において関数の定義域,値域,関数方程式,のみが書かれている時は,「条件を満たす関数を全て求めよ」という意味であるとします.例題によっては「こんな解き方よりもっと簡単な解き方があるだろ!」というような解説もあるでしょうが,あくまで各手法の説明を主眼に置いているのでご容赦お願いいたします.

4　各手法の解説

4.1　解の予想

関数方程式は, まず解となる関数が何かを予想するところから始まります. だいたいの場合解は多項式 (ほぼ高々 2 次) か分母が 1 次以下の分数関数になるので, そのあたりで予想して絞っていきます. ただし, この時その予想にとらわれすぎると間違った証明を書いてしまう場合があるので注意が必要です. また, 解が全く予想できないようなものもあります. そのような場合は, 解き進めるにつれて関数がどのようなものか明らかにしていく, というイメージを持つとよいでしょう.

4.2　特殊な代入

関数方程式の問題を解くのは, 与式の文字に適切な値を代入するところから始まります. 代入 は主に, 0 代入 , 両辺の f の中身を合わせて消す代入, 対称性の高い 2 文字の入れ替えなどに従って行います.

例題　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$　　$f(x-y)+2y=f(f(x)+y)(\forall x,y\in\mathbb{R})$

解法　先に述べたような, 両辺の f の中身をそろえるような代入を考えると, y に $\frac{x-f(x))}{2}$ を代入すればよさそうだと分かります.実際, $P(x,\frac{x-f(x)}{2})$ から $f(\frac{x+f(x)}{2})+x-f(x)=f(\frac{x+f(x)}{2})$ となるので, 両辺の $f(\frac{x+f(x)}{2})$ が消えて $f(x)=x$ とわかります.

4.3　全射性・単射性

先に, 全射性および単射性の説明をしておきます.

- 全射性 : 関数 $f:X\to Y$ が全射であるとは, 任意の $y\in Y$ についてある $x\in X$ が存在し, $f(x)=y$ となることを言う.
- 単射性 : 関数 $f:X\to Y$ が単射であるとは, 任意の $x_1,x_2\in X$ について, $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$が成り立つことを言う.

すなわち, 全射であると は f がその値域内の全ての値を f が取ることを言い, また単射であるとはある値 y を $f(x)$ がとるような x は高々 1 つであることを言っています.全射性・単射性の証明方法および条件としての使い方については, 以下例題と共に見ていくこととします.

例題　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$　　$f(x-y)+2y=f(f(x)+y)(\forall x,y\in\mathbb{R})$

解法　先ほどと同じ問題ですが, 別の解き方で解いてみましょう.$P(x,x)$ より $f(f(x)+x)=2x+f(0)$ となります.この式において, x を実数全体の中を動かすと, 右辺は任意の実数値を取ります (つまり, 任意の実数 z に対し $2x+f(0)=z$ なる x が存在する).したがって, 左辺は $f(t)$ の形をしているので, $f(x)$ が任意の実数値を取ると分かりますね?(具体的に書くと, 任意の実数 z について $f(f(\frac{z-f(0)}{2})+\frac{z-f(0)}{2})=z$) また , $P(x,0)$ より $f(f(x))=f(x)$ とわかります.

すると, $f(x)$ は全射なので, $f(f(x))=f(x)$ は全ての実数値 $f(x)$ で成り立つわけです.したがって, $f(x)=x(\forall x\in\mathbb{R})$ とわかるわけです (具体的に書くと $f(f(f(\frac{z-f(0)}{2})+\frac{z-f(0)}{2}))=f(f(\frac{z-f(0)}{2})+\frac{z-f(0)}{2})\Rightarrow f(z)=z(\forall z\in\mathbb{R})$).

上記の全射の示し方は, f(ほげほげ) $=$ (全実数値を取る式) という形の式から f(ほげほげ) は任意の実数値を取りうる, というものです.全射性を示す時はだいたいこのように示す場合が多いでしょう.全射性の使い方としては, $f(x)$ が任意の実数値を取るのだから, $f(x)$ だけの式の $f(x)$ を全実数値を取る $x\in\mathbb{R}$ に変えてしまおう, という感じです.これは全射性の非常に重要な使い方です.

次の例題は, 全射性のもう一つの使い方をするものです.

例題　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$　　$f(xf(y)+x)=xy+f(x)(\forall x,y\in\mathbb{R})$

解法　$P(1,y)$ より $f(f(y)+1)=y+f(1)$ となるので, f は全射であるとわかります (前述同様!).よって $f(t)=-1$ なる $t\in\mathbb{R}$ の存在がわかります.すると, このような t について, $P(x,t)$ より $f(0)=xt+f(x)\Rightarrow f(x)=-tx+f(0)$ となります.この式はつまり, f が直線関数であることを示していますね?($\because t,f(0)$ の値は

定数) よって, $f(x)=cx+d$ などとおいてやると (c,d は定数)

$$(\text{与式の左辺})=f(cxy+(d+1)x)=c^2xy+c(d+1)x+d \tag{1}$$
$$(\text{与式の右辺})=xy+cx+d \tag{2}$$

となるので, $(1)=(2)$ が x,y についての恒等式となるとわかります.あとは係数比較して, $c^2=1, c(d+1)=c \Rightarrow c=\pm1, d=0$ となるので $f(x)=x,-x(\forall x\in\mathbb{R})$ とわかるわけです.

上記の考え方は,f の全射性から都合のいい $f(x)$ の値を持つ x を取ってくる, というものです.ここでは $f(t)=-1$ なる t を取ってきましたが, 普通は $f(t)=0$ なる t をとってくることが多いように思います.これも全射性の重要な使い方のひとつです.また, f が直線関数と決まったら, 上記のように文字でおいてしまって計算する方が楽でしょう.この手法も時折使います.

さて, 次は単射性を使う問題です. 実は全射性を使っても非常に簡単に解けるので, 解いてみるといいかもしれません.

例題　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$　$f(f(x)-f(y))+2y=f(x+f(y))(\forall x,y\in\mathbb{R})$

解法　$f(a)=f(b)$ なる任意の $a,b\in\mathbb{R}$ をについて, $P(x,a),P(x,b)$ より $2a=2b\Rightarrow a=b$ となるので, f は単射とわかります.よって $P(x,0)$ より $f(f(x)-f(0))=f(x+f(0))$ となるので, 単射性から $f(x)-f(0)=x+f(0)\Rightarrow f(x)=x+2f(0)$ となりますね?したがって, この x に 0 を代入すると $f(0)=2f(0)\Rightarrow f(0)=0$ となるので, $f(x)=x(\forall x\in\mathbb{R})$ とわかります.

単射性は上記のように, $f(a)=f(b)$ なる a,b を取ってきて $a=b$ を示すことによって証明することがほとんどです.また使い方も, $f(\text{ほげほげ})=f(\text{ほげほげ})$ という形の式を作って両辺の f を外す, というものがほとんどです.

単射性を使う問題をもう 1 問やってみることにします.

例題　$x+f(x)=f(f(x))(\forall x\in\mathbb{R})$ を満たす $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ について, $f(f(x))=0$ の解を全て求めよ

解法　今までの関数方程式とは少し雰囲気が違いますが, 臆することはありません. $f(a)=f(b)$ なる任意の $a,b\in\mathbb{R}$ について, 与式に a,b を代入して $a+f(a)=f(f(a)), b+f(b)=f(f(b))$ となるので $a=b$ と分かります.よって f は単射と言えますね?さて, このままだと進展がないので与式の x に 0 を代入してみましょう.すると $f(f(0))=f(0)$ とわかります.よって, f の単射性より $f(0)=0$ と言えるので, 単射性を繰り返し用いて $f(f(x))=0=f(f(0))\Rightarrow f(x)=f(0)\Rightarrow x=0$ と分かります.また $f(f(0))=0$ なので, $x=0$ が唯一解と分かります.

以上が全射性, 単射性の解説になります. では最後に, これらよりはもう少し難しい問題をやってみましょう.

例題　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$　$f(f(x)^2+f(y))=xf(x)+y(\forall x,y\in\mathbb{R})$

解法　与式から単射性がすぐわかりますね.また $P(0,y)$ より全射性もすぐにわかります (やってみよう). f は全射なので $f(t)=0$ なる $t\in\mathbb{R}$ をとると, $P(t,y)$ より $f(f(y))=y(\forall y\in\mathbb{R})$ がわかるので, $P(f(x),y)$ より $f(f(f(x))^2+f(y))=f(x)f(f(x))+y\Rightarrow f(x^2+f(y))=xf(x)+y$ となります.したがって, この式と与

式を見比べて, f の単射性より $f(x)^2+y=x^2+y \Rightarrow f(x)^2=x^2$と言えます.

$$\therefore f(x)=\pm x(\forall x \in \mathbb{R})^{*2}$$

さて, ここで $f(1)=\pm 1$ なので, $f(1)=1$ としましょう.すると, $P(f(x),1)$ より $f(x^2+1)=xf(x)+1$ となります.ここで, $f(x^2+1)=\pm(x^2+1)$, $f(x)=\pm x$ なので, $f(x^2+1)=-(x^2+1)$ とすると $-x^2-1=\pm x^2+1$ となって矛盾ですね?したがって, $f(x^2+1)=x^2+1$ となるので, $x\neq 0$ の時は $f(x)=x$ となります.また $f(0)=\pm 0=0$ なので, $f(x)=x(\forall x \in \mathbb{R})$ となります.

同様にして, $f(1)=-1$ の時は $P(f(x),-1)$ から, $f(0)=0, f(1)=-1$ と合わせて $f(x)=-x(\forall x \in \mathbb{R})$ と分かります.

$$\therefore f(x)=x,-x(\forall x \in \mathbb{R})$$

4.4 定義域を $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{R}$ へ拡張

まず, 広義単調増加・減少および狭義単調増加・減少について説明します.$a<b$ なる任意の $a,b \in \mathbb{R}$ について

- f が広義単調増加である : $f(a) \leqq f(b)$ が成り立つ.
- f が狭義単調増加である : $f(a) < f(b)$ が成り立つ.
- f が狭義単調減少である : $f(a) \geqq f(b)$ が成り立つ.
- f が狭義単調減少である : $f(a) > f(b)$ が成り立つ.

ここからわかる ように, f が狭義単調増加または狭義単調減少ならば, f は単射である, と言えます.このセクションにおける考え方以外にも, これらの性質を使う問題はよくあります.

次の例題を見てみましょう.

例題　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$　$f(x^2+y)=f(x)^2+f(y)$

解法　$P(0,0)$ より $f(0)=0$ となります.ここで, 正実数 r について $P(\sqrt{r},y)$ より $f(y+r)=f(y)+f(\sqrt{r})^2 \geqq f(y)$ となりますね?これはつまり, f が広義単調増加であることを示していますね?この事実が後々効いてきます.

さて , $P(x,0)$ より $f(x^2)=f(x)^2+f(0)=f(x)^2$となるので, $P(x,y)$ より

$$f(x^2+y)=f(x^2)+f(y) \tag{3}$$

となります. ここから まず f(整数) の値を決定していきましょう.$f(1)=c$ とすると, (3) の x に 1 を代入して $f(y+1)=f(y)+c$ となります.よって, 一番最初にやった例題のようにして, $f(m)=cm(\forall m \in \mathbb{Z})$ が成り立ちます.

次に f(有理数) の値を求めましょう.先ほどと同様に漸化式のような式を作っていきます.まず (3) の x に $\sqrt{y}$を代入すると (ただし $y \in \mathbb{R}_{\geqq 0}$)$f(2y)=f(y)+f(y)=2f(y)$ となりますね?同様なことを考えると , (3) の x に$\sqrt{ny}$を代入して $f((n+1)y)=f(ny)+f(y)$ となります.したがって, 帰納的に $f(ny)=nf(y)$ となります ($\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, y \in \mathbb{R}_{\geqq 0}$).すると, この y に $\frac{m}{n}$(ただし $m \in \mathbb{Z}$) を代入することで $f(m)=nf(\frac{m}{n})$ となり

---

*2 ここで, これを解としてはいけません. 何故なら, 得られたこの 式は $f(x)=x(\forall x \in \mathbb{R})$ または $f(x)=x(\forall x \in \mathbb{R})$ と同値ではないからです.つまり, $f(a)=a$ なる $a \in \mathbb{R}$ と $f(b)=-b$ なる $b \in \mathbb{R}$ がともに存在する可能性があるからです.

ますね?したがって, $f(\frac{m}{n})=\frac{f(m)}{n}=\frac{cm}{n}$となります.この$\frac{m}{n}$は何を表しているかというと…そう,任意の有理数ですね!どういうことかというと,任意の有理数は適当な $m\in\mathbb{Z}$ と $n\in\mathbb{Z}_{>0}$を用いて$\frac{m}{n}$と書ける,ということです.したがって, $f(\frac{m}{n})=\frac{cm}{n}\Rightarrow f(x)=x(\forall x\in\mathbb{Q})$ と言えます.

以上で f(有理数) の値が求まりました.あとはここから f(実数) を求めるのですが,ここで先ほど示した広義単調増加性が効いてくるわけです.いま,任意の $x\in\mathbb{R}$ について, x にいくらでも近い, $\alpha<x<\beta$なる$\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$ が取れますね?(このような性質のことを,稠密性と呼びます.すなわち $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ に対して稠密である,と言います) すると,このようなα,βについて $f(\alpha)\leqq f(x)\leqq f(\beta)$ となることが広義単調増加性よりわかります.この時, $f(x)=cx(\forall x\in\mathbb{Q})$ を先ほど示していたので, $f(\alpha)=c\alpha, f(\beta)=c\beta$となりますね?よって $c\alpha\leqq f(x)\leqq c\beta$となり,また先ほどの議論から$\alpha$と$\beta$は x にいくらでも近づけることができるので, $f(x)=cx$ でしかありえない,となるわけです (厳密には, $f(x)=t<cx$ となったとすると $t<c\alpha<cx$ なる $\alpha\in\mathbb{Q}$ が取れてしまい矛盾, $f(x)>cx$ でも同様,とやるわけです).

したがって $f(x)=cx(\forall x\in\mathbb{R}, c$ は実定数) となるので与式に代入して $f(x^2+y)=c(x^2+y)=f(x)^2+f(y)=c^2x^2+cy$ となります.よってこれが x,y について恒等式より $c=0,1$ となりますね?よって $f(x)=0,x(\forall x\in\mathbb{R})$ となります.

この問題の大まかな議論の流れをおさらいすると以下の通りです.

1. f の単調性を示す (この問題では広義単調増加性を示しましたが,単調減少性を示す場合もあります)
2. f(整数) の値を帰納的に求める
3. f(有理数) の値を帰納的に求める
4. f(実数) の値を求める

この議論の流れはとても重要で,またこの内容は次のセクションにも大きく関わる内容なのでぜひしっかりと理解していただきたいと思います.

4.5 Cauchy の関数方程式

関数方程式にしてはめずらしい,ある種定理のようなものです.以下説明します.

Cauchy の関数方程式　関数方程式 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$　$f(x+y)=f(x)+f(y)$ は, f について次の条件のいずれかが与えられていた時解が $f(x)=cx(\forall x\in\mathbb{R}, c$ は実定数) に定まる.

条件 1　f がある点で連続である.
条件 2　f が単調性を持つ.
条件 3　f がある区間内で上または下に有界である.

ただし f がある区間内で上または下に有界であるとは,その区間内の任意の x について $f(x)<M$ となるか,任意の x について $f(x)>M$ なる定数 M が存在することを指します.証明はいずれも,前のセクションで行ったように f(有理数) の値を求め,そこから f(実数) の値を絞り込む,という形で行います (ここでは証明は略します.)

一つ軽い例題をやってみましょう.この式に帰着する関数方程式も少なからず見られます.

例題　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$　$f(x+y)=f(x)+f(y), f(xy)=f(x)f(y)(\forall x,y\in\mathbb{R})$

解法　上のどれ かの条件を作ることを目標にしましょう.二つ目の式の y に x を代入して, $f(x^2)=f(x)^2\geqq 0$ を得られますね?よって, $f(x)\geqq 0(\forall x\in\mathbb{R}\geqq 0)$ となるので, 上記の条件が満たされていると言えます.したがって f は直線関数より, 少し計算して $f(x)=x(\forall x\in\mathbb{R})$ とわかります.

以上が Cauchy の関数方程式の説明です. 与えられた関数方程式を解きほぐしていくとこの形に帰着されることが多々あるので, そうなったら〜のいずれかを示すことを考えてみるとよいでしょう.

4.6　不等式評価

f の値域が $\mathbb{R}_{>0}$である場合などは, 与えられた関数方程式を不等式評価して解く場合があります.次の例題を考えてみましょう.

例題　$f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}\quad f(x)f(yf(x))=f(x+y)$

解法　とりあ えず, $f(yf(x))$ と $f(x+y)$ の中身が一致するような代入を試してみましょう.この時, 代入ができるためには $y=\frac{x}{f(x)-1}$が正の実数である必要があります $(\because f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0})$.しかし, この代入ができてしまうと $f(x)=1$ となってしまい矛盾します.ここから議論を進めていきましょう.

ある $t\in\mathbb{R}_{>0}$について $f(t)>1$ となったと仮定します.この時, $P(t,\frac{t}{f(t)-1})$ より $f(t)f(\frac{tf(t)}{f(t)-1})=f(\frac{tf(t)}{f(t)-1})$ となるので, $f(\frac{tf(t)}{f(t)-1)})>0$ より $f(t)=1$ となります.しかしこれは $f(t)>1$ に矛盾するので, $f(x)\leqq 1(\forall x\in\mathbb{R}_{>0})$ とわかります.すると, 与式より $f(x)f(yf(x))=f(x+y)\leqq f(x)(\forall x,y\in\mathbb{R}_{>0})$ となるので, 任意の $x\in\mathbb{R}_{>0}$について $x+y$ は x より大きな任意の正実数値をとることから f は広義単調減少関数であるとわかります (つまり, 任意の $a,b\in\mathbb{R}_{>0}(a<b)$ について, $f(a+(b-a))=f(b)\leqq f(a)$ となる).

さて, ここでもし f が狭義単調減少であると言えれば, f の単射がわかるわけです.狭義単調減少であることを言うためには, $f(x)<1(\forall x\in\mathbb{R}_{>0})$ が示されれば ($f(yf(x))<1$ となるので) 十分ですね?ここでそれを否定してみましょう.すなわち, ある $u\in\mathbb{R}_{>0}$に対して $f(u)=1$ となったとします.

すると, $P(u,y)$ より $f(u)f(yf(u))=f(u+y)\Rightarrow f(y)=f(y+u)(\forall y\in\mathbb{R}_{>0})$ となるので f は周期関数とわかります.よって $f(nu)=1(\forall n\in\mathbb{Z}_{>0})$ となりますね?したがって, f は広義単調減少関数なので, 任意の $x\in\mathbb{R}_{>0}$について $x<mu$ なる $m\in\mathbb{N}$ がとれることより, $f(x)\geqq 1(\forall x\in\mathbb{R}_{>0})$ となります.

$$\therefore f(x)=1(\forall x\in\mathbb{R}_{>0})(\because f(x)\leqq 1(\forall x\in\mathbb{R}_{>0}))$$

さて, これ以外の場合, すなわち $f(x)<1(\forall x\in\mathbb{R}_{>0})$ の場合を考えてみましょう.この時は, 前述より f は狭義単調減少関数となります.したがって単射なので, どうにかしてこの条件を使える式を持ってくることを考えてみましょう.とりあえず, f(ほげほげ) $=f$(ほげほげ) みたいな式が欲しいので, 適当な tk,l をとって $f(k)f(lf(k))=f(k+l)$ とし, どうにかして与式と比較したりできないかなー…と考えると, $k=yf(x),k+l=x+y$ としてやると $f(lf(k))=f(x)$ となっていい感じじゃない?となるわけです (!).

つまり $P(yf(x),x+y-yf(x))$ としてやると (こういう代入ができるのは $f(x)<1\Rightarrow y-yf(x)>0$ のおかげ), $f(yf(x))f((x+y-yf(x))f(yf(x)))=f(x+y)$ となるので, 与式と比較して $f(x)=f((x+y-yf(x))f(yf(x)))$ となります.したがって, f の単射性より f を外して $x=(x+y-yf(x))f(yf(x))$ となります.よって, この y に$\frac{1}{f(x)}$を代入して $f(x)=\frac{1}{(\frac{1}{f(1)}-1)x+1}$となるので, $f(x)=\frac{1}{cx+1}(\forall x\in\mathbb{R}_{>0})$ と言えますね?以上より, 解はこれと $f(x)=1$ の 2 つとわかります.

この問題のように, 不等式評価を行う場合はなんらかの単調性を導くことを 念頭に置くと良いでしょう.また, 任意の正整数 n について成り立つ不等式を帰納的に構成し, n を限りなく大きくする, といった手法も見かけます (この手法は整数論でもよく用いられます).

4.7 練習問題

最後は少し難しめになってしまいましたが, 以上が基本手法の解説になります. 以下練習問題をいくつか挙げておきます. 解答も載せますが, 解説ではなく簡単な解答のみとします (以上で説明した知識を使うパートは大まかに説明するのみとする場合があります).

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(f(x+y)f(x-y))=x^2-yf(y)(\forall x,y\in\mathbb{R}) \quad (JMO2012)$
2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f([x]y)=f(x)[f(y)](\forall x,y\in\mathbb{R})$ ただし, $[x]$ は x 以下の最大の整数. $\quad (IMO2010)$
3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad g(f(x+y))=f(x)+(2x+y)g(y)(\forall x,y\in\mathbb{R}) \quad (IMOShortlist2011)$
4. $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}_{\geqq 1} \quad f(x)f(x+y)=f(2x+y)+(f(x)-1)f(y)(\forall x,y\in\mathbb{Q})$ (和田杯 2014)
5. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad f(y^2+2xf(y)+f(x)^2)=(y+f(x))(x+f(y))(\forall x,y\in\mathbb{R}) \quad (EGMO2014)$

4.8 解答編

1. まず $P(x,0)$ より $f(f(x)^2)=x^2(\forall x\in\mathbb{R})$ となります, ここで, 与式及び $P(x,-y)$ より $f(f(x+y)f(x-y))=x^2-yf(y), f(f(x-y)f(x+y))=x^2+yf(-y)$ となるので,$yf(y)=-yf(-y)\Rightarrow f(-y)=-yf(y)(\forall y\in\mathbb{R}_{\neq 0})$ とわかります. また,$f(0)^2=t$ とおくと,$P(0,0)$ より $f(t)=0$ となり,$P(0,t)$ から $f(0)=0$ と言えるので,$f(-y)=-f(y)(\forall t\in\mathbb{R})$.
   従って,$P(0,x)$ より $f(f(x)f(-x))=-xf(x)\Rightarrow -f(f(x)^2)=-xf(x)$ となるので, $f(f(x)^2)=x^2=xf(x)(\forall x\in\mathbb{R})$ とわかります.よって, $x\neq 0$ の時 $f(x)=x$ と言えるので, $f(0)=0$ より $f(x)=x(\forall x\in\mathbb{R})$ と言えました.
2. $P(0,y)$ より $f(0)=[f(0)]f(y)(\forall y\in\mathbb{R})$ となります.
   $[f(0)]\neq 0$ の時, $f(y)=\frac{f(0)}{[f(0)]}(\forall y\in\mathbb{R})$ となるので f は定数関数とわかります.よって $f(x)=c(\forall x\in R, c$ は $1\leqq c<2$ なる定数) となります ($\because f(0)\neq 0$).
   $[f(0)]=0$ の時, $f(0)=[f(0)]f(y)=0$ より $f(0)=0$ となります.ここで, 0 以上 1 未満の実数 t であって $f(t)\neq 0$ なるものが存在したとすると, $P(t,0)$ より $0=f(0)=f(t)[f(y)](\forall y\in\mathbb{R})$ となるので $[f(y)]=0(\forall y\in\mathbb{R})$ と言えます.したがって, $P(1,y)$ から $f(y)=0(\forall y\in\mathbb{R})$ を得ます.しかしこれは $f(t)\neq 0$ に矛盾.
   よって $f(x)=0(\forall x\in\mathbb{R}, 0\leqq x<1)$ となります.また, 任意の $x\in\mathbb{R}$ についてある $N\in\mathbb{Z}$ をとると $0\leqq \frac{x}{N}<1$ となることから, $P(N,\frac{x}{N})$ より $f(x)=0(\forall x\in R)$ とわかります.したがって, $f(x)=0, c(\forall x\in R, c$ は $1\leqq c<2$ なる定数) となります.
3. $P(x,0)$ より $g(f(x))=f(x)+2g(0)x$ となり, また $P(0,x)$ より $g(f(x))=xg(x)+f(0)$ となるので $f(x)+2g(0)x=xg(x)+f(0)\Rightarrow f(x)=xg(x)-2g(0)x+f(0)$ とわかります.
   したがって, 与式から $g(f(x+y))=f(x)+(2x+y)g(y)=xg(x)-2g(0)x+(2x+y)g(y)+f(0)$ とわかります.x と y を入れ替えて, $g(f(x+y))=yg(y)-2g(0)y+(x+2y)g(x)+f(0)$ となるので,
   $xg(x)-2g(0)x+(2x+y)g(y)+f(0)=yg(y)-2g(0)y+(x+2y)g(x)+f(0)\Rightarrow 2yg(x)+2g(0)x=$

$2xg(y)+2g(0)y$ とわかります.よって,この y に 1 を代入して $g(x)=(g(1)-g(0))x+g(0)$ となるので,g は直線関数とわかります.よって,$f(x)=xg(x)-2g(0)x+f(0)=(g(1)-g(0))x^2-g(0)x+f(0)$ となるので,これらを与式に代入して計算することで $(f(x),g(x))=(0,0)(x^2+c,x)(\forall x\in R,c$ は定数 $)$ とわかります.

4. $P(x,-x)$ より $f(0)f(x)=f(x)+(f(x)-1)f(-x)\Rightarrow f(x)f(-x)=(f(0)-1)f(x)+f(-x)$ となるので,この x に $-x$ を代入して $f(x)f(-x)=f(x)+(f(0)-1)f(-x)$ となります.よって $(f(0)-1)f(x)+f(-x)=f(x)+(f(0)-1)f(-x)\Rightarrow(f(0)-2)(f(x)-f(-x))=0$ となります.
   ここで $f(0)\neq 2$ とすると,$f(x)=f(-x)(\forall x\in\mathbb{R})$ とわかるので,先ほどの式から $f(x)f(-x)=f(x)^2=(f(0)-1)f(x)+f(-x)=f(0)f(x)\Rightarrow f(x)(f(x)-f(0))=0(\forall x\in\mathbb{R})$ と言えます.したがって,$f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}_{\geqq 1}$より $f(x)=f(0)(\forall x\in\mathbb{R})$ とわかります.つまり f は定数関数より,$f(x)=c(\forall x\in\mathbb{R},c$ は定数$)$ となります.
   $f(0)=2$ の時を考えましょう.$P(1,x)$ より $f(1)f(x+1)=f(x+2)+(f(1)-1)f(x)$ となるので,$f(1)=c+1$ とすると $f(x+2)=(c+1)f(x+1)-cf(x)\Rightarrow f(x+2)-1=(c+1)(f(x+1)-1)-c(f(x)-1)$ となるので,帰納的に $f(m)=cm+1(\forall m\in\mathbb{Z})$ とわかります.また,$n\in\mathbb{Z}_{\geqq 0}$について,$P(x,nx)$ より $f(x)f((n+1)x)=f((n+2)x)+(f(x)-1)f(nx)\Rightarrow f(x)(f((n+1)x)-1)=f((n+2)x)-1+(f(x)-1)(f(nx)-1)\Rightarrow f(nx)=(f(x)-1)^n+1(\forall n\in\mathbb{Z}_{>0},x\in\mathbb{R})$ となります.したがって,$f(m)=c^m+1(\forall m\in\mathbb{Z})$ から $f(\frac{m}{n})=c^{\frac{m}{n}}+1(\forall m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{Z}_{>0})$ となるので,$f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}_{\geqq 1}$ より $f(x)=c^x+1(\forall x\in\mathbb{Q},c$ は定数$)$ となります.
   以上より,$f(x)=c,c^x+1(\forall x\in\mathbb{Q},c$ は定数$)$ とわかります.
5. まず $P(x,-f(x))$ より $f(2f(x)^2+2xf(-f(x)))=0$ となります.ここで,$f(t)=f(u)=0$ なる $t,u\in\mathbb{R}$ が存在したとすると $P(t,t),P(t,u),P(u,t),P(u,u)$ より $f(t^2)=t^2=tu,f(u^2)=tu=u^2$となるので $t=u$ となります.よって $f(x)=0\Rightarrow x=2c(c:$ 定数$)$ となるので,前述より $f(x)^2+xf(-f(x))=c(\forall x\in\mathbb{R})$ となります.
   ここで,$f(a)=f(b)$ なる $a,b\in\mathbb{R}$ について,$f(a)^2+af(-f(a))=f(b)^2+bf(-f(b))=c$ より $af(-f(a))=bf(-f(b))$ となります.したがって,$f(-f(a))=f(-f(b))$ より $a=b$ または $f(-f(a))=f(-f(b))=0$ とわかります.まずある a,b について後者のようになった場合を考えます.
   この時,$f(-f(a))=f(-f(b))=0$ より $f(a)=f(b)=-2c$ となるので,$f(a)^2+af(-f(a))=4c^2=c$ とわかります.よって $c=0,\frac{1}{4}$となります.しかし,$c=0$ の時は,$f(a)=f(b)=0$ なので,前述より $a=b$ となります.よって前者の場合に帰着されます.
   $c=\frac{1}{4}$の時を考えましょう.$f(2c)=f(\frac{1}{2})=0$ となり,また $f(x)^2+xf(-f(x))=c=\frac{1}{4}$の x に$\frac{1}{2}$を代入して,$f(0)=\frac{1}{2}$とわかります.さて,ここで $f(t)=\frac{1}{2}$なる $t\in R$ を考えると,$P(\frac{1}{2},t)$ より $f(\frac{t^2-1}{2})=0$ となるので,$t^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\pm\ 1$ とわかります.$P(x,0)$ および $P(0,x)$ から $f(f(x)^2+x)=f(x)(x+f(0)),f(x^2+f(0)^2)=f(x)(x+f(0))$ となるので $f(f(x)^2+x)=f(x^2+f(0)^2)$ となります.ここで,$f(x)^2+x\neq x^2+f(0)^2$とすると $f(x)^2+x,x^2+f(0)^2=1,-1$ となりますが,$x^2+f(0)^2=x^2+\frac{1}{4}\geqq 0$ より $x^2+\frac{1}{4}=1\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$となります.したがって $x>-1$ となりますが,$f(x)2+x=-1\geqq x>-1$ となって矛盾します.
   さて,全ての a,b について前者のようになる,すなわち f が単射である場合を考えましょう.この時,$P(x,y)$ および $P(y,x)$ から $f(y^2+2xf(y)+f(x)^2)=f(x^2+2yf(x)+f(y)^2)$ なので,単射性から $y^2+2xf(y)+f(x)^2=x^2+2yf(x)+f(y)^2$とわかります.

$\therefore y^2+2xf(y)+f(x)^2=x^2+2yf(x)+f(y)^2(\forall x,y\in\mathbb{R})$

よって, この y に 0 を代入して $f(x)^2=(x-f(0))^2$となるので, $y^2+2xf(y)+f(x)^2=y^2+2xf(y)+(x-f(0))^2=x^2+2yf(x)+f(y)^2=x^2+2yf(x)+(y-f(0))^2\Rightarrow y^2+2xf(y)+(x-f(0))^2=x^2+2yf(x)+(y-f(0))^2\Rightarrow x(f(y)-f(0))=y(f(x)-f(0))$ と言えます.よって, この y に 1 を代入して, $f(x)=(f(1)-f(0))x+f(0)$, すなわち f は直線関数とわかります.したがって, $f(x)=cx+d$ とおいて与式に代入して計算することで, $f(x)=x,-x,\frac{1}{2}-x(\forall x\in R)$ となります.

5 さらに流行を追いかける

5.1 はじめに (再)

ここまで書いてきたことは, 基本的に実数や正実数集合に対し定義される関数における関数方程式を解く上でのプロパーな手法の説明でした. しかし, そのような問題は昔から様々に出題され, ネタ切れになってきている感があります (それでもまだ出題されてはいますが). そして, 最近は整数や正整数集合に対して定義されている関数における関数方程式が増えてきている, と感じます. 特に整数→整数, 正整数→正整数などといった関数における関数方程式は, 代数的考察のみならず整数論的考察も必要になってくる場合もあり, 数論分野の問題としても多く出題されています. ここからは, そういった類の問題について, 敢えてこれは代数の問題, これは数論の問題と明確に区別することなく解説をしていきたいと思います. 残念ながら, 前述のように各手法の体系的な説明, というわけにはいきませんが, ある程度難易度順には並べられていると思います. なるべく数論的知識を使わない問題を選んだ (とはいえ, 合同式など最低限の知識, と考えられるものは用いています. 知らない方は, インターネットなどで調べながら読んでいただけると幸いです) つもりなので, 一度自分で解いてみてもいいかも知れません. 解説は最後にまとめて掲載します. また, 以下に扱う問題は全て 2009 年〜2015 年の問題であることを付記しておきます.

5.2 問題編

1. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}\quad f(m)+f(n)=f(mn)+f(m+n+mn)(\forall m,n\in\mathbb{Z})\quad(JMO2013)$
2. S を $\{2,3,4,\cdots\}$ とする.$S\to S$ の関数 f であって, $f(a)f(b)=f(a^2b^2)(\forall a,b\in S,a\neq b)$ なるものは存在するか. $(APMO2015)$
3. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\quad m^2+f(n)\nmid mf(m)+n(\forall m,n\in\mathbb{N})\quad(IMOShortist2013)$
4. $f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a)(\forall a,b,c\in\mathbb{Z},a+b+c=0)\quad(IMO2012)$
5. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\quad f(m)+f(n)+f(f(m2+n2))=1(\forall m,n\in\mathbb{Z})$ なる f について, $f(a)-f(b)=3$ なる $a,b\in\mathbb{Z}$ の存在がわかっている.この時, $f(c)-f(d)=1$ なる $c,d\in\mathbb{Z}$ が存在することを示せ. $(IranTeamSelectionTest2013)$
6. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\quad f(n!)=f(n)!(\forall n\in\mathbb{N})\quad m-n\nmid f(m)-f(n)(\forall m,n\in\mathbb{N},m\neq n)\quad(USAMO2012)$
7. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\quad xf(2f(y)-x)+y^2f(2x-f(y))=\frac{f(x)^2}{x}+f(yf(y))(\forall x,y\in\mathbb{Z},x\neq 0)\quad(USAMO2014)$
8. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}\quad f(m-n)\nmid f(m)-f(n)(\forall m,n\in\mathbb{Z})$ なる f について, $f(m)\leqq f(n)$ なる任意の m,n に対し $f(m)\nmid f(n)$ が成り立つことを示せ. $(IMO2011)$
9. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ であって, 任意の正整数 a,b に対し $a,f(b),f(b+f(a)-1)$ の値が非退化な三角形の 3 辺の長さの値となるようなものを全て求めよ.ただし非退化な三角形とは, 3 頂点が同一直線上にない三角形

のことであるとする．　$(IMO2009)$

10. $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\quad f^{g(n)+1}(n)+g^{f(n)}(n)=f(n+1)-g(n+1)+1(\forall n\in\mathbb{N})$.ただし $f^k(n)$ は $f(f(\cdots f(n)\cdots))$ と f を k 回合成した関数を表すとする．　$(IMOShortlist2011)$

5.3　解説編

1. 0 代入とかしても進展がなさそうなので $P(m,1)$ を考えると $f(m)+f(1)=f(m)+f(2m+1)\Rightarrow f(2m+1)=f(1)(\forall m\in\mathbb{Z})$ とわかります.とりあえず $f(1)$ は定数なのでこの値を c とでも置いてあげると, $f(\text{奇数})=c$ となります.さて, この条件をなんとか利用したいので $P(m,2n+1)$ を考えてみましょう (つまり与式の n を奇数にするわけです).すると $f(m)+f(2n+1)=f(m(2n+1))+f(m(2n+2)+2n+1)\Rightarrow f(m)=f(m(2n+1))(\forall m,n\in\mathbb{Z})$ とわかりますね?($\because f(\text{奇数})=c, m(2n+2)+2n+1:\text{奇数}$) つまり, 任意の整数 2^td(ただし d は奇数, t は非負整数) について $f(2^td)=f(2^t)$ となるわけです.したがって, $f(2$ のべき乗数$)$ の値を求めればよい, とわかります.
   この値が得られるような代入を考えましょう.k を正整数として $P(2,2^k)$ とすると, $f(2)+f(2^k)=f(2^{k+1})+f(2+2^k+2^{k+1})$ となります.さて, この式において $f(2+2^k+2^{k+1})$ が邪魔なわけですが, $k\geqq 2$ の場合を考えると, $f(2+2^k+2^{k+1})=f(2(1+2^{k-1}+2^k))$ となるわけで, $f(m)=f(m(2n+1))(\forall m,n\in\mathbb{Z})$ より $1+2^{k-1}+2^k:\text{奇数}$ ($\because k\geqq 2$) から $f(2(1+2^{k-1}+2^k))=f(2)$ となりますね？したがって, $k\geqq 2$ において $f(2^k)=f(2^{k+1})$ とわかります.また $k=1$ の時は, $f(2)+f(2)=f(4)+f(8)$ となるので, 前述より $f(4)=f(8)$ であることから $f(4)=f(2)$ となります.したがって , $f(2^k)=f(2^{k+1})$ と合わせて $f(2n)=f(2)(\forall n\in\mathbb{N})$ となりますので, 任意の偶数 2^td(ただし d は奇数, t は正整数) について $f(2^td)=f(2^t)=f(2)$ となりますね？したがって $f(n)=c(\forall n:\text{奇数}), d(\forall n:\text{偶数})$(ただし c,d は定数) となります.
2. 存在しなさそうなのでその証明をしましょう (てか存在するとしたらさすがに具体例構成とかやばそうですし).$f(2$ のべき乗数$)$ の値を考えてみましょう.$f(2^k)=g(k)$(ただし $k\in\mathbb{N}$) とすると, $P(2^k,2^l)$ より $g(k)g(l)=g(2k+2l)(\forall k,l\in\mathbb{N})$ となります.以下この式を与式, として扱うこととします.ここから漸化式のような式立てることを考えましょう.
   この時, $P(k,2)$ より $g(k)g(2)=g(2k+4)$ となり, また $P(k+1,1)$ より $g(k+1)g(1)=g(2k+4)$ となります.よって, $g(k)g(2)=g(k+1)g(1)$ となるので $\frac{g(2)}{g(1)}=c$ とすると $g(k+1)=cg(k)$ となり , $g(1),g(2),\cdots$ は等差数列となり, $g(n)=c^{n-1}g(1)$ と言えます.
   $\therefore c^{k-1}g(1)c^{l-1}g(1)=c^{2k+2l-1}g(1)(\because(\text{与式})\Rightarrow g(1)=c^{2k+2l-1})$
   よって, $g(1)$ は定数で $c=\frac{g(2)}{g(1)}>0$ より, $c=1$ となります.したがって, $g(n)=c^{n-1}g(1)=g(1)$ となるので与式より $g(k)g(l)=g(1)^2=g(2k+2l)=g(1)\Rightarrow g(1)^2=g(1)$ とわかりますが, これは $g(1)\in S$ に矛盾.よって題意を満たす f は存在しないと言えました.
3. とりあえず, 与式の左側・右側共に正なので $m^2+f(n)\leqq mf(m)+n\Rightarrow m(m-f(m))\leqq n-f(n)(\forall m,n\in\mathbb{N})$ となります.よって, ある $k\in\mathbb{N}$ について $f(k)=k$ が言えれば, 先ほどの式の m,n に k を代入して得られる 2 式から $0\leqq m-f(m)\leqq 0\Rightarrow f(m)=m(\forall m\in\mathbb{N})$ と言えます.
   ここで, なるべく f の少ない式を作ることを考えると, $P(m,m)$ より $m^2+f(m)\nmid mf(m)+m=m(m^2+f(m))-(m^3-m)\Rightarrow m2+f(m)\nmid m3-m(\forall m\in\mathbb{N})$ となります.この左側がいい感じの (素

数に近い) 値になってくれないかなーと考えると, $m=2$ のとき $f(2)+4\nmid 6$ となることがわかります. よって, $f(2)+4$ は 4 より大きい 6 の約数なので, 6 でしかありえないですね？したがって $f(2)=2$ となるので, 前述の議論より $f(m)=m(\forall m\in\mathbb{N})$ とわかりました.

4. とりあえず $P(0,0)$ より $3f(0)^2=6f(0)^2\Rightarrow f(0)=0$ となるので, $P(a,-a,0)\Rightarrow f(a)^2+f(-a)^2=2f(a)f(-a)\Rightarrow f(a)=f(-a)(\forall a\mathbb{N}\mathbb{Z})$ とわかります.
まあ帰納法っぽく攻めていくんだろうなあ…と考えると, $f(1)=c$ として $P(a+1,-a,-1)$ より , $f(a)=f(-a)(\forall a\in\mathbb{Z})$ から $f(a+1)^2+f(a)^2+c^2=2f(a+1)f(a)+2cf(a+1)+2cf(a)\Rightarrow f(a+1)^2-2(f(a)+c)f(a+1)+(f(a)-c)^2(\forall a\in\mathbb{Z})$…となる.
これを元に $f(2),f(3),f(4)$ の値を計算していこう.まず, より $f(2)^2-4cf(2)=0\Rightarrow f(2)=0,4c$ となる.
・$f(2)=0$ の時
より $f(3)^2-2cf(3)+c^2=0\Rightarrow f(3)=c$ となる.
よって, より $f(4)^2-4cf(4)=0\Rightarrow f(4)=0,c$ となる.しかし, $P(4,-2,-2)$ より $f(4)^2=4f(2)f(4)$ となるので, $f(4)=0$ とわかる.
・$f(2)=4c$ の時
より $f(3)^2-10c+9c^2=0\Rightarrow f(3)=c,9c$ となる.
$f(3)=c$ の時は, より $f(4)^2-4cf(4)=0\Rightarrow f(4)=0,4c$ となるが, $P(4,-2,-2)$ より $f(4)^2=4f(2)f(4)$ なので, $f(4)=0$ となる.
また $f(3)=9c$ の時は, より $f(4)^2-20cf(4)+64c^2=0\Rightarrow f(4)=4c,16c$ となるが, $f(4)^2=4f(2)f(4)$ なので $f(4)=16c$ となる.
以上より, $(f(1),f(2),f(3),f(4))=(c,0,c,0)(c,4c,c,0)(c,4c,9c,16c)$ となる.前者 2 つの場合は, 前述同様の議論を繰り返して f が各々周期 2, 4 の周期関数とわかる.また最後の場合は, 及び $P(a+1,-a+1,-2)$ から $f(a)=ca^2(\forall a\in\mathbb{Z})$ となることが容易にわかる.したがって, 求める f は次の 3 通り (ただし c は定数).
$f(x)=c(\forall x:$ 奇数$),0(\forall x:$ 偶数$)$
$f(x)=c(\forall x\equiv 1(mod2)),4c(\forall x\equiv 1(mod4)),0(\forall x\equiv 0(mod4))$
$f(x)=cx^2(\forall x\in\mathbb{Z})$

5. $f($ほげほげ$)-f($ほげほげ$)$ の取りうる値の話をしているので, そのような値全ての集合を取ってみましょう. つまり, 集合 $S=f(m)-f(n)\nmid m,n\in\mathbb{Z}$ を定義するわけです.この要素に関して何か条件付けができないか考えてみることにしましょう.
この時, $P(m,n),P(k,l)$ から $f(m)+f(n)+f(f(m^2+n^2))=f(k)+f(l)+f(f(k^2+l^2))=1$ となるので, $f(m)-f(k)+f(n)-f(l)=f(f(k^2+l^2))-f(f(m^2+n^2))$ とわかります.この式はどういう意味の式かというと, 任意の要素 $x,y\in S$ について $x+y\in S$ となることを示しています .よって, S の要素のうちで最も小さい正の値を r とすると $S=mr\nmid m\in\mathbb{Z}$ となります.何故なら , $x\in S\Rightarrow -x\in S$ は自明なので, 任意の 2 数 $x,y\in S$ について $x-y\in S$ となるので, 互除法の操作を考えることで $\gcd(x,y)\in S$ となります.よって r の倍数ではない S の要素 s が存在したとすると , $r>\gcd(r,s)\in S$ となって r の最小性に矛盾.より示されました.
さて, 題意より $3\in S$ なので r は 3 の正の約数, $1or3$ となります. $r=3$ と仮定しましょう.すると, 任意の $m\in\mathbb{Z}$ について $f(m)\equiv f(0)(mod3)(\because f(m)-f(0)\in S=3m\nmid m\in\mathbb{Z})$ となるので, 与式より $f(m)+f(n)+f(f(m2+n2))=1\equiv 3f(0)\equiv 0(mod3)$ となって矛盾, となります.したがっ

て $r=1$ と言えたので, $r=1\in S$ より題意は示されました.

6. まず $f(1)!=f(1), f(2)!=f(2)$ より, $(f(1),f(2))=(1,1)(1,2)(2,1)(2,2)$ となります.
・$f(2)=1$ の時
$f(m)=1(\forall m\in\mathbb{N}\geqq 2)$ となることを示しましょう. m についての帰納法で示すことにします. $m=2$ の時は仮定より明らかなので, $k\in\mathbb{N}\geqq 2$ に対し $f(k)=1\Rightarrow f(k+1)=1$ が示されれば良いとなります. $f(k)=1$ とします. この時, $k+1-2=k-1\nmid f(k+1)-2$ より $f(k+1)\equiv 1(modk-1)$ とわかります. 示したいことは $f(k+1)=1$ なので, $f(k+1)\geqq k-1+1=k$ として矛盾を言うことにします. すると, $k!\nmid(k+1)!-k!=k\cdot k!\nmid f((k+1)!)-f(k!)=f(k+1)!-f(k)!=f(k+1)!-1$ なので, 先ほどの $f(k+1)\geqq k\Rightarrow k!\nmid f(k+1)!$ と合わせて $k!\nmid 1$ となって矛盾がわかります. より示されました. よって $f(3)=1$ となるので, $3-1=2\nmid f(3)-f(1)=1-f(1)$ から $f(1)=1$ となります. $\therefore f(x)=1(\forall x\in\mathbb{N})$
・$f(2)=2$ の時 前述同様の帰納法により, $f(m)=2,m(\forall m\in\mathbb{N}\geqq 2)$ が言えます (自分で示してみてください). 各々について $f(3)=2,3$ なので, $3-1=2\nmid f(3)-f(1)$ から $f(1)=2,1$ とわかります.
$\therefore f(x)=2,x(\forall x\in\mathbb{N})$ 以上より $f(x)=1,2,x(\forall x\in\mathbb{N})$ となります.

7. まず $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ より, 与式から $\frac{f(x)^2}{x}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\nmid f(x)^2$ となります. ここでこの x に素数 p を代入すると (数論的な関数方程式ではこのように素数代入をする場合が結構あります) $p\nmid f(p)^2\Rightarrow p\nmid f(p)$ となるので, $p\nmid\frac{f(p)^2}{p}$ と言えますね？したがって, $P(p,0)$ より得られる式の両辺を $modp$ で見て, $p\nmid f(0)$ とわかります. これが全ての素数 p について成り立つので, $f(0)$ の値では 0 でしかあり得ませんね？
さて, $f(0)$ の値がわかったので 0 代入をしましょう. $P(x,0)$ より, $xf(-x)=\frac{f(x)^2}{x}(\forall x\in\mathbb{Z}\neq 0)$ とわかります. よって $x^2f(-x)=f(x)^2\Rightarrow f(-x)=\frac{f(x)^2}{x^2}$ となります. また, この x を $-x$ にしても成り立つはずなので, $f(x)=\frac{f(-x)^2}{x^2}=\frac{f(x)^4}{x^6}$ となります. $\therefore f(x)=0orf(x)^3=x^6$
ここで, ある $t\in\mathbb{Z}\neq 0$ について $f(t)=0$ となったとすると, $P(x,t)$ より $xf(-x)+t^2f(2x)=\frac{f(x)^2}{x}$ となるので, $xf(-x)=\frac{f(x)^2}{x}$ より $t^2f(2x)=0\Rightarrow f(2x)=0(\forall x\in\mathbb{Z}\neq 0)(\because t\neq 0)$ となるので, $f(0)=0$ と合わせて $f(x)=0(\forall x\in\mathbb{Z})$ となります.
そうでない場合を考えましょう. この時, $f(x)^3=x^6(\forall x\in\mathbb{Z}\neq 0)$ となるので, $(f(x)-x^2)(f(x)^2+xf(x)+x^2)=0$ より $f(x)=x^2(\forall x\in\mathbb{Z}\neq 0)$ となります $(\because f(x)^2+xf(x)+x^2=(f(x)+\frac{x}{2})^2+\frac{3x^2}{4}>0)$. よって $f(0)=0$ と合わせて $f(x)=x^2(\forall x\in\mathbb{Z})$ と言えます.
$\therefore f(x)=0,x^2(\forall x\in\mathbb{Z})$

8. $P(m,0)$ より $f(m)\nmid f(m)-f(0)\Rightarrow f(m)\nmid f(0)(\forall m\in\mathbb{Z})$ となるので, $P(0,-m)$ から $f(m)\nmid f(0)-f(-m)\Rightarrow f(m)\nmid f(-m)$ とわかります. よって, この m を $-m$ にすると $f(-m)\nmid f(m)$ となるので, これらを合わせて $f(m)=\pm\ f(-m)\Rightarrow f(m)=f(-m)(\forall m\in\mathbb{Z})$ となります $(\because f(m),f(-m)\in\mathbb{N})$.
さて, $f(x)\leqq f(y)$ なる任意の x,y について考えましょう. この時 $P(x,y),P(x-y,-y),P(x-y,x)$ より, $f(m)=f(-m)(\forall m\in\mathbb{Z})$ から次の 3 式が成り立ちます.
$f(x-y)\nmid f(x)-f(y)$
$f(x)\nmid f(x-y)-f(y)$
$f(y)\nmid f(x-y)-f(x)$
したがって, 便宜上 $f(x-y)=a,f(x)=b,f(y)=c$ とすると, $a\nmid b-c,b\nmid a-c,c\nmid a-b$ となります. 示すべきことは $b\nmid c$ なので, これを不等式評価から導くことにしましょう. $a,b,c\in\mathbb{N}$ に注意してください.
$b\leqq c$ より, $b=c$ または $a\leqq c-b$ となります. $b=c$ の時は自明に $b\nmid c$ なので, $a\leqq c-b$ の時を

考えましょう.$a \leqq c-b < c$ なので $0 < c-a$ より $b \nmid c-a$ から $b \leqq c-a$ となりますね？よって ,$a-b < a+b \leqq c$ より $a-b < c$ なので,$c \nmid a-b$ から $a=b$ または $a-b \leqq -c$ とわかります .前者の時は $b \nmid a-c = b-c \Rightarrow b \nmid c$ となって示すべき式を得られ, また後者の時は,$a \leqq c-b$ より $2a-c \leqq a-b \leqq -c$ より $2a \leqq 0$ となって $a \in \mathbb{N}$ に矛盾します.したがって $b \nmid c$ と言えたので, 題意は示されました.

9. 題意の 3 数が非退化三角形である, という条件の a, b に a_1, b_1を代入して得られる条件を $P(a1, b1)$ とします.また, 以下 $p, q \in \mathbb{Z}, p > q \Rightarrow p-1 \geqq q$ に注意してください (断りなく用いることにします).
   さて,$P(1, b)$ より $f(b) \geqq f(b+f(1)-1)(\forall b \in \mathbb{N})$ となるので, $f(1)-1=t$ とすると, もし $t \geqq 1$ ならば, $f(i) \geqq f(jt+i)(\forall i \in \{1, 2, \cdots, t\}, j \in \mathbb{Z}_{\geqq 0})$ となるので, $\max\{f(1), f(2), \cdots, f(t)\} \geqq f(i) \geqq f(jt+i) = f(m)(\forall m \in \mathbb{N})$ より, 任意の $m \in \mathbb{N}$ について $f(m)$ の値は定数値 $\max\{f(1), f(2), \cdots, f(t)\}$ 以下であるとわかります.しかしこれは, 十分大きい (具体的には $2\max\{f(1), f(2), \cdots, f(t)\}$ 以上の)a について $P(a, b)$ に反します ($\because a \geqq 2\max\{f(1), f(2), \cdots, f(t)\} \geqq f(b)+f(b+f(a)-1)$ となってしまう).よって $t \leqq 0 \Rightarrow f(1) \leqq 1 \Rightarrow f(1) = 1(\because f(1) \in \mathbb{N})$ より $f(1)=1$ と言えるわけです.
   すると,$P(a, 1)$ より $a \geqq f(f(a)), a \leqq f(f(a))$ となるので, $f(f(a)) = a(\forall a \in \mathbb{N})$ と言えました.さて, これを用いて $f(m) \leqq m(\forall m \in \mathbb{N})$ を示すことにしましょう.これが示されれば, $m = f(f(m)) \leqq f(m)$ より $m \leqq f(m) \leqq m$ となって $f(m) = m(\forall m \in \mathbb{N})$ とわかります.
   ある $k \in \mathbb{N}$ について $f(k) > k$ となったと仮定します.この時, $P(k, b)$ より $f(b)+k-1 \geqq f(b+f(k)-1)$ となります.この式は, f の中身が $f(k)-1$ 増えても値は高々 $k-1$ しか増えないということを表しているので, $f(m)$ の値は (m の 1 次式) 以下って感じで評価できるなあ…というイメージが立ちます.
   つまり, $i \in \{1, 2, \cdots, f(k)-1\}, j \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$を用いて $m = i+j(f(k)-1)$ と表せる任意の正整数 $m \in \mathbb{N}$ について $j(k-1)+f(i) \geqq f(i+j(f(k)-1)) = f(m)$ となり, またここから i, j を消去することを考えると ,$c = \frac{k-1}{f(k)-1}, d = \max\{1, 2, \cdots, f(k)-1\}$ として $j(k-1)+f(i) \leqq j(k-1)+d = cm-ci+d \leqq cm+d$ となります (ただし, $f(1)=1$ より $f(k) > k \geqq 2$ となることに注意).よって, これを $f(f(a)) = a(\forall a \in \mathbb{N})$ に適用します.すると, $a = f(f(a)) \leqq f(cf(a)+d) \leqq c(ca+d)+d = c^2a+(c+1)d(\forall a \in \mathbb{N})$ となりますね？しかし, $f(k) > k$ なので $c < 1$ より, 十分に大きい (具体的には$\frac{d}{1-c^2}$より大きい)a をとると $a \leqq c^2a+d$ は成り立たなくなります.よって矛盾が言えたので, $f(m) \leqq m(\forall m \in \mathbb{N})$ が示されました.したがって, 前述の議論より $f(m) = m(\forall m \in \mathbb{N})$ とわかりました.
   このように, $f(x) = x$ を示す時に, まず $f(x) \leqq x$ や $f(x) \geqq x$ を示す, というパターンは割と見かけるように思います.

10. まず, $f(n)$ の取りうる値の最小値を $f(a) = k$ と置いてみましょう (最小値の存在は $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ より保証されています).すると, もし与式の n に $a-1$ が代入できるならば $k+1 \leqq f^{g(a-1)+1}(a-1) + g^{f(a-1)}(a-1) = f(a)-g(a)+1 \leqq f(a) = k$ となって矛盾してしまいます.よって $a-1$ は代入できない, つまり $a-1 \leqq 0$ となります.したがって, $a \in \mathbb{N}$ より $a=1$ とわかります.今度は $f(n)$ の取りうる値のうち 2 番目に小さいものを $f(b) = l$ と置いてみましょう.すると, 与式の n に $b-1$ を代入して $f^{g(b-1)+1}(b-1)+1 \leqq f^{g(b-1)+1}(b-1)+g^{f(b-1)}(b-1) = f(b)-g(b)+1 \leqq f(b) = l$ となるので ,$fg(b-1)+1(b-1) = k < l$ とわかります.
    $\therefore f^{g(b-1)}(b-1) = 1$
    よって, 最小値 k の値は 1 とわかります.以下これと同様な議論を帰納法で繰り返していくことにしましょう.示すべき命題を次の 2 つとします.これらをまとめて $P(t)$ としましょう.
    - $f(n)$ の取りうる値の中で t 番目に小さい値は $f(t)$ で, また $f(n) = f(t)$ なる n の値は t のみである

.

- t より小さい任意の $u \in \mathbb{N}$ について $n = u \Leftrightarrow f(n) = u$ が成り立つ.

$i \in \mathbb{Z}_{\geqq 1}$について $P(i)$ が成り立つならば $P(i+1)$ が成り立つことを示しましょう.$P(i)$ を仮定するので, $f(1) = 1, f(2) = 2, \cdots, f(i-1) = i-1$ となります.まず上側を示しましょう.$f(n)$ の取りうる値の中で $i+1$ 番目に小さい $f(n)$ を与える全ての c について考えます.

この時, $P(i)$ より $i+1 \leqq c$ と言えます.ここで,既に何度も使っている不等式ですが,与式より $f^{g(n)+1}(n) < f^{g(n)+1}(n) + g^{f(n)}(n) = f(n+1) - g(n+1) + 1 \leqq f(n+1)(\forall n \in \mathbb{N})$ となるので,この n に $c-1$ を代入して ($2 \leqq i+1 \leqq c$ に注意)$f^{g(c-1)+1}(c-1) < f(c)$ とわかります.また,ある n について $f(n) \leqq i \Rightarrow f(n) \leqq i-1 or f(n) = i \Rightarrow$ 前者の場合は $P(i)$ の下側より $n \leqq i-1$, 後者の場合は i は $f(n)$ の取りうる値の中で i 番目に大きい値でしかありえないので $n = i \Rightarrow n \leqq i$ となるので, $P(i)$ より $f^{g(c-1)+1}(c-1) < f(c) \Rightarrow f^{g(c-1)}(c-1) \leqq i \Rightarrow f^{g(c-1)-1}(c-1) \leqq i \Rightarrow \cdots \Rightarrow c-1 \leqq i$ となるので, $c-1 \leqq i \Rightarrow c \leqq i+1$ より $c = i+1$ とわかります ($\because i+1 \leqq c$).$P(i+1)$ の上側が示されました.

さて,下側を示しましょう.$f(i) = i$ を示せば, $P(i)$ の上側よりその逆は言えます.$f(i) \geqq i+1$ と仮定しましょう.すると, $f^{g(i)+1}(i) < f(i+1)$ となります.また, $f(i) \geqq i+1$ より $f(f(i)) \geqq f(i+1)(\because P(t)$ の下側, $P(t+1)$ の上側) より $f(f(i)) \geqq f(i+1) \geqq f(i) \geqq i+1$ と言えます.以下同様にして $f^{g(i)+1}(i) \geqq f(i+1)$ となりますが,これは $f^{g(i)+1}(i) < f(i+1)$ に矛盾です.また $i-1 \leqq f^{g(i-1)+1}(i-1) < f(i)$ より $i \leqq f(i)$ なので,これらを合わせて $f(i) = i$ となります.よって $P(i+1)$ の下側は示されました.

以上より, $P(t)$ が全ての $t \in \mathbb{N}$ について言えたので,これの下側より $f(n) = n(\forall n \in \mathbb{N})$ と言えました.また,与式にこれを代入して $g(n) = 1(\forall n \in \mathbb{N})$ とわかります.

6　終わりに

いかがでしたか？もしあなたここまで読み飛ばすことなく辿り着けているなら, 相当な精神力の持ち主, と呼べるかもしれません（笑）きっちり読んでくれた方も, 飛ばし飛ばし読んでくれた方も, ここまで読んでいただいてありがとうございます. 拙い日本語のせいで色々と読みにくい部分があったと思いますが, 本稿を読んで少しでも, 数学という学問全体からすればたわいもないお遊びのようなものかも知れないような関数方程式というものの面白さ, 奥深さをを感じ取っていただけたならとても嬉しいです. また, ひょっとしたら来年の部誌には, 関数方程式の中でも, 本稿では説明しきれなかったようなより数論的な側面を持つものにスポットを当てた記事を書かせていただくかもしれません. その時はまた, 是非お手にとっていただけたらなと思います. ではでは.

7　出典・参考 HP

各練習問題に付記していた出典の略称について説明します.

JMO…日本数学オリンピック. 毎年 1 月に予選が,2 月に本選が開催されます (本稿で紹介した問題は全て本選の問題です). 他の科学オリンピックと違いバカ高い受験料がかかっちゃう…試験形式は 4 時間 5 問. 入賞ラインは平均して 2 問半くらい.

IMO…国際数学オリンピック. 毎年 7 月に行われる国際大会で, 多くの国々が参加しています. 各国からは最

大 6 人の選手が開催地に派遣され, 全員の合計得点で国別に順位を競います. 試験形式は 4 時間半 3 問× 2 日. 金メダルのラインはだいたい 4 完くらい.

IMO Shortlist…前述の IMO の問題は, 毎年各国が開催国に自分たちが作成した問題を提出し, それらの中から偉い人たちが選んだ問題から構成されています.Shortlist とはその候補問題のうち,IMO の問題には選ばれなかった問題をあつめたリストです. 各々の年に開催された IMO の Shortlist の問題は, 各国が国内の IMO 代表選抜の試験として使うことがあるので, 翌年の IMO まで一般公開が禁止されています (つまり各国の数学オリンピック委員会の偉い人たちは知っているわけです).

和田杯…灘校文化祭の数学研究部コーナーにおいて,2014 年から始まった大会. 部員たちの自作の問題を集めたもので, 文化祭 2 日目の終わりに行われる解説までに解き, 受付に持っていき見事正解判定をもらうと, 豪華賞品がゲットできます.

EGMO…ヨーロッパ女子数学オリンピック. 毎年 4 月 (ちょうど今部誌を書いている頃ですね) に行われる, 言わば女子版 IMO. 比較的新しい大会で (2012〜), 各国からは最大 4 人の代表選手が派遣されています. 試験形式は IMO と同じ.

APMO…アジア太平洋数学オリンピック. 国際大会だが試験および採点は各国で行われ, 各国の選手の上位 10 人が代表選手となり, 答案が開催国に送られます. 開催国側が採点の再チェックを行い, 選手全員の得点の合計で国別に順位を競います. 試験形式は JMO と同じ.

Iran Team Selection Test…イラン IMO 代表選考. イランで IMO の代表選抜に使われる試験. 問題がいっぱいあって, イランの選手の大変さが伺えます (アメリカとか中国の方がやばそうだけど). 試験形式は IMO と同じ.

USAMO…アメリカ数学オリンピック. アメリカにおける JMO といった感じですが, 試験形式は IMO と同じ. 日本同様, これのあとに更に Team Selection Test をやって代表決めてるみたいです.

以下参考にした HP を紹介します.

IMO 公式 HP(https://www.imo-official.org)…IMO の公式 HP です.Problems のコーナーに, 過去の IMO の問題や Shortlist およびその解答が pdf 形式でアップロードされています.

Art of Problem Solving(http://www.artofproblemsolving.com)…様々な数学のコンテストの問題がアップされている掲示板. 海外の国内大会や国際大会の問題がたくさん上がっており, また多くの強者達によって解答が書き込まれています.