$f(x) = \sqrt[x]{x}$ の最大値とグラフ

中学 3 年 3 組 22 番　竹下　直樹

1　はじめに

本日は灘校文化祭、および数学研究部にお越し頂き誠にありがとうございます。中三の竹下です。部誌には初の投稿となります。本当は別の記事を載せるつもりでしたが、高二の方にこの記事を載せろと言われたので、この記事にしておきます。ちなみに、この記事は、夏期セミナーに使ったものをそのまま載せたもので、オリジナリティに欠けている面が強いかもしれませんが、そこを突っ込むのはお控えください。

2　特殊値

まず、$f(x) = \sqrt[x]{x}$ の $x > 0$ の性質について話しておきます。まず、$f(1)$ から $f(5)$ までの値の大小を比較します。$f(2), f(3), f(4), f(5) > 1 = f(1)$ であり、

$9 = 3^2 > 2^3 = 8, 81 = 3^4 > 4^3 = 64, 1024 = 5^4 > 4^5$ より、

$\sqrt[6]{3^2} > \sqrt[6]{2^3}$, $\sqrt[12]{3^4} > \sqrt[12]{4^3}$, $\sqrt[20]{4^5} > \sqrt[20]{5^4}$ がわかるため、$2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}, 3^{\frac{1}{3}} > 4^{\frac{1}{4}} > 5^{\frac{1}{5}}$、すなわち $f(2) < f(3), f(3) > f(4) > f(5)$ である。これより、$2 < x < 4$ の間に極値があることが推測される。こんな下らないことだが、これでも考え抜くのに二週間かかったのである。

次項からは、$f(x) = \sqrt[x]{x}$ の導関数の求め方とグラフについて記しておく。

3　$f(x) = \sqrt[x]{x}$ の最大値とグラフ

関数 $f(x) = \sqrt[x]{x}$ が $x > 0$ において最大となるような x の値を求める。

$f(x) = \sqrt[x]{x}$ を変形して、$x^{\frac{1}{x}}$ とする。次に、$x^{\frac{1}{x}}$ を微分する。

$x^{\frac{1}{x}}$ の微分には、対数微分法を用いる。まず、両辺の対数をとり、$\log(f(x)) = \log(x^{\frac{1}{x}}) = \frac{1}{x}\log x$

そして、両辺を微分し、$\frac{d(\log(f(x)))}{dx} = \frac{d\frac{1}{x}\log x}{dx} = \frac{d\frac{1}{x}}{dx}\log x + \frac{1}{x}\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\log x = \frac{1-\log x}{x^2}$

また、$\frac{d(\log f(x))}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx}\frac{d(\log(f(x)))}{d(f(x))} = \frac{d(f(x))}{dx}\frac{1}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}$（$\because$ 合成関数の微分）

以上より、$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1-\log x}{x^2}$ となり、$f'(x) = \frac{1-\log x}{x^2}f(x) = x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\log x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}-2}\cdot(1-\log x)$ となる。

$x > 0$ のため、$x^{\frac{1}{x}-2} > 0$ である。ゆえに、$f'(x)$ の正負は $1 - \log x$ の正負と一致する。よって、 $f'(x)$ の正負は以下のようになる。

$$※\begin{cases} x < e \text{ ならば、} 1 - \log x \text{ は正で、} f'(x) \text{ も正。} \\ x = e \text{ ならば、} 1 - \log x \text{ は } 0 \text{ で、} f'(x) \text{ も } 0\text{。} \\ x > e \text{ ならば、} 1 - \log x \text{ は負で、} f'(x) \text{ も負。} \end{cases}$$

以上より、 $\sqrt[x]{x}$ は、$x = e$ のとき最大となり、このとき $f(x)$ はおよそ 1,445 となる（1,44466⋯）。

今度は、$f(x) = \sqrt[x]{x} (x > 0)$ のグラフを書く。そして、以下の三つに場合分けして考える。

$$\begin{cases} \text{(1) 0¡x¡1のとき。} \\ \text{(2) x=1のとき。} \\ \text{(3) x¿1のとき。} \end{cases}$$

(1) のとき、$x = \frac{1}{p}$ とする。すると $p > 1$ であり、$\sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}} = (\frac{1}{p})^p = \frac{1}{p^p}$ である。$g(p) = p^p$ は狭義単増加である。x を増やすと p は減るため、p^p も減る。ゆえに、$0 < x < 1$ のとき、$f(x)$ は広義単調増加であり、$\lim_{p \to \infty} \frac{1}{g(p)} = 0$

(2) のとき、$\sqrt[x]{x} = 1$

(3) のとき、　$\sqrt[1]{1} = 1$ より、$x < 1$ のとき $\sqrt[x]{x} > 1$ となる。だが、(※) より、$1 < x < 1,4445$ であり、x=eのときに最大値をとるため、さらにxを大きくしていくとf(x)は減少することになる。なお、以下にx=2,3,⋯,10の値を記しておく。f(2) ≒ 1,414 f(3) ≒ 1,442 f(4) ≒ 1,414 f(5) ≒ 1,380 f(6) ≒ 1,348 f(7) ≒ 1,320 f(8) ≒ 1,297 f(9) ≒ 1,277 f(10) ≒ 1,259 （いずれも小数第 4 位以下を四捨五入）〜と※より、$f(x) = \sqrt[x]{x}$ のグラフは右のようになる。

引用　対数微分法：http://www.geocities.jp/phaosmath/diff2/logdiff.htm