Dedekind Cut の拡張

高校 2 年 2 組 35 番　中山裕大

1　はじめに

本日は灘校文化祭及び数学研究部にお越しいただき誠にありがとうございます. この記事では, 去年書いた Dedekind Cut の拡張とそこに導入される位相について, 去年の文化祭後にわかったことや誤植を訂正したものを書いていきます (去年と変わっていない証明は書きません.). この記事を読んでおられる方の中には Dedekind Cut が何かご存知の方も多いかと思われますが, これは $\mathbb{Q}$ に空いた数多くの「穴」(例えば $\sqrt{2}, e, \pi$. 無理数のことです.) を切断という概念でとらえ, その切断の集合を $\mathbb{R}$ とおいて実数を構成する方法です.

5 章までは集合, 論理についての知識 (数 I) が,6 章以降は位相についての知識 (大学または定義 2.4, 定義 2.5) があれば読むことが出来ます.

2　準備

まずここで使う記号の導入をします.$a := b$ とは a を b(に等しいもの) として定義するという意味です.$\mathbb{N}_0$ で非負整数の集合を表します. 集合族 (集合の集合)$\mathfrak{U}$ に対し,$\bigcup \mathfrak{U} := \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U$ とおきます. さらに,$\sharp A$ で A の元の個数を (ただし元が無限個のときは $\sharp A := \infty$),$card\ A$ で A の濃度を表します.

定義 2.1（順序に関する定義）　集合 A における関係 $\leqq$ が以下を満たすとき,$\leqq$ を A における順序という.

1. A の元 a に対し $a \leqq a$
2. A の元 a, b に対し $(a \leqq b \wedge b \leqq a) \Rightarrow a = b$
3. A の元 a, b, c に対し $(a \leqq b \wedge b \leqq c) \Rightarrow a \leqq c$

集合, 順序の組 $(A, \leqq)$ を順序集合という.$a \geqq b$ は $b \leqq a$ を,$a < b$ は $a \leqq b$ かつ $a \neq b$ を,$a > b$ は $a < b$ を表す.$a \leqq b$ のとき b は a 以上である,a は b 以下であるなどといい,$a < b$ のとき b は a より大きい,a は b より小さいなどという.

順序集合 $(A, \leqq)$ において, 任意の A の 2 元 a, b に対し $a \leqq b$ または $a \geqq b$ のとき,$(A, \leqq)$ を全順序集合という.

順序集合 $(A, \leqq)$ の空でない部分集合 M の 2 元 a, b に対し,$a \leqq_M b$ を $a \leqq b$ によって定義すれば, これは M における順序となる. 順序集合 $(M, \leqq_M)$ を $(A, \leqq)$ の部分順序集合という.

順序集合 $(A, \leqq)$ において,A の部分集合 M に対し $a \in M$ であって $\forall b \in M, a \geqq b (a \leqq b)$ なるものを M の最大元 (最小元) といい $\max M (\min M)$ と書く.A の部分集合 M に対し,$M^* := \{x \in A | \forall a \in A, a \leqq x\}, M_* := \{x \in A | \forall a \in A, a \geqq x\}$ とする.$M^*(M_*) \neq \emptyset$ のとき M は上（下）に有界という.M が上（下）に有界のとき,$M^*(M_*)$ の元を M の上界 (下界) という.M が上（下）に有界で $\min M^* (\max M_*)$ が存在すると

き, それを M の上限 (下限) といい $\sup M(\inf M)$ と書く.A の任意の空でない部分集合に上限, 下限が存在するとき, 順序集合 A を完備束という.□

命題 2.2 順序集合 A の部分集合 M において,$\max M, \min M$ は存在するとすれば一意 □

証明は自明なので省略します. この定理から, 上限, 下限も存在するならば一意であることが分かります.

今後, 順序を表す際には, 混同の恐れがない限り異なる順序であっても全て記号 $\leqq$ を用いることにします.$\leqq$ は実数の大小関係でないことに注意してください. また, 混同の恐れがない限り順序集合 $(A, \leqq)$ のことを単に順序集合 A と言います.

定理 2.3（順序単射） 順序集合 $(A, \leqq)(A', \leqq')$ を考える.A から A' への写像 f が以下を満たすとき,f は単射.

$$a \leqq b \Leftrightarrow f(a) \leqq f(b)$$

このとき f は順序単射という.□

集合に関する補足をします.A, B, C は集合とします.$A \sqcup B = C$ とは,$A \cap B = \emptyset$ かつ $A \cup B = C$ を表します.$P(A)$ で A の冪集合 (部分集合の集合) を表します. また,$A^n := \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | a_1, a_2, \cdots, a_n \in A\}$, $A - B := \{x \in A | x \notin B\}$ とします. 集合族 (集合の集合)$\mathfrak{U}$ に対し,$\cup\mathfrak{U} := \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U$ とおきます.

以下の部分はとりあえず書いておきましたが, 眺めただけでは何のための定義か分からないことも多いだろうので, 以下に挙げる参考文献のような本で一から位相を学ばれることをお勧めします. その場合には, 定義 2.5 の直後まで読み飛ばしていただいて結構です.

定義 2.4（位相に関する定義） $S \neq \emptyset$ を集合とする.

S のある部分集合系 (部分集合の集合)$\mathfrak{O}$ が以下の性質を満たすとき,$\mathfrak{O}$ は S に位相構造を定める,$\mathfrak{O}$ は S における位相であるという. このとき集合, 部分集合系の組 $(S, \mathfrak{O})$ を位相空間という.$\mathfrak{O}$ の元を開集合という.

1. $S, \emptyset \in \mathfrak{O}$
2. $O_1, O_2 \in \mathfrak{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$
3. $(\forall \lambda \in \Lambda, O_\lambda \in \mathfrak{O}) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$

$M \subseteqq S$ に対し,M に含まれるすべての開集合の和集合をとれば, それは M を含む最大の開集合となり, それを M の開核という. 通例 M^i とかく.

$x \in S$ に対し,$x \in V^i$ となる集合 V を x の近傍という.

開集合の補集合として表される集合を閉集合という. 全ての閉集合の集合を閉集合系と言う. 通例 $\mathfrak{A}$ とかく.$M \subseteqq S$ に対し,M を含むすべての閉集合の共通部分をとれば, それは M を含む最小の閉集合となり, それを M の閉包と言う. 通例 M^a とかく.

$\mathfrak{M} \subseteqq P(S)$ が与えられたとき,$\mathfrak{M}$ を含むどの S における位相にも (集合の包含関係で) 含まれるような S における位相を $\mathfrak{M}$ で生成される位相という.

位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたとき,$\mathfrak{O}$ の部分集合 $\mathfrak{B}$ に対し $\mathfrak{O}$ の任意の元が $\mathfrak{B}$ の (任意個の) 元の和集合として表されるとき $\mathfrak{B}$ は $\mathfrak{O}$ の基底という. 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ に, 高々可算 (自然数の集合への単射が存在すること) な基底が存在するとき, 位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ は第二可算公理を満たすという.

位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ は, 以下の (T_1)(と同値な条件),(T_3)(と同値な条件) を満たすとき正則,(T_1)(と同値な条件),(T_4)(と同値な条件) を満たすとき正規と言われる.

(T_1):$\forall x \in S, \{x\} \in \mathfrak{A}$

(T_3):$\forall x \in S, \forall O \in \mathfrak{O} s.t. x \in O, \exists O' \in \mathfrak{O}, x \in O' \subseteqq O'^a \subseteqq O$

(T_4):$\forall A \in \mathfrak{A}, \forall O \in \mathfrak{O} s.t. O \supseteqq A, \exists O' \in \mathfrak{O}, A \subseteqq O' \subseteqq O'^a \subseteqq O$

位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の部分集合 M と S の部分集合系 $\mathfrak{U}$ に対し,$M \subseteqq \cup \mathfrak{U}$ が成り立つとき $\mathfrak{U}$ を M の被覆といい, 特に $\mathfrak{U} \subseteqq \mathfrak{O}$ のとき開被覆と,$\mathfrak{U}$ が有限集合のとき有限被覆という. 任意の M の開被覆が有限被覆のとき M はコンパクトであるといい,S の任意の元のある近傍がコンパクトなとき $(S, \mathfrak{O})$ を局所コンパクトという.□

$\mathfrak{M}$ で生成される位相は

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcap_{\mu \in M_\lambda} A_\mu \qquad (M_\lambda \text{は有限集合}, A_\mu \in \mathfrak{M})$$

と表される全ての集合の全体からなることが知られています.

$\mathfrak{B}$ が位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ の基底であることの必要十分条件として以下が知られています.

$$\forall x \in S, \forall O \in \mathfrak{O} s.t. x \in O, \exists W \in \mathfrak{B}, x \in W \subseteqq O$$

また第二可算公理, 正則性を満たす位相空間は正規性をみたすことが知られています.

定義 2.5（距離に関する定義） $S \neq \emptyset$ とする.

写像 $d : S^2 \to \mathbb{R}$ が以下を満たすとき d を S 上の距離関数という. 集合, 距離関数の組 (S, d) を距離空間という.

1. $\forall x, y \in S, d(x, y) \geqq 0$
2. $\forall x, y \in S, (d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$
3. $\forall x, y \in S, d(x, y) = d(y, x)$
4. $\forall x, y, z \in S, d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$

距離空間 (S, d) において次のようにして位相を導入できる.

$$O \in \mathfrak{O} \Leftrightarrow (\forall x \in O, \exists \epsilon > 0, \{y \in S | d(x, y) < \epsilon\} \subseteqq O)$$

位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ に対し, 開集合系が上のようにある距離関数から得られるとき,$(S, \mathfrak{O})$ は距離づけ可能と言われる.□

第二可算公理, 正規性を満たす位相空間は距離づけ可能であることが知られています.

今,$M (\neq \emptyset)$ を全順序集合とし,

$$\forall x, y \in M, \exists z \in M, x < y \Rightarrow x < z < y \tag{1}$$

とします. また煩雑な議論を避けるため M に最小元, 最大元は存在しないものとします (存在すれば成り立たない定理があることが分かりました. すみません.).

3 M の切断

M における切断を定義する.

定義 3.1（M の切断） M の部分集合 A, B に対し,(A, B) が M の切断とは,

1. $A, B \neq \emptyset$

2. $A \sqcup B = M$
3. $a \in A, b \in B \Rightarrow a < b$

が成り立つことをいう.□

例 3.2

$$A_x := \{y \in M | y \leqq x\}, B_x := \{y \in M | y > x\}, A'_x := \{y \in M | y < x\}, B'_x := \{y \in M | y \geqq x\}$$

とすれば, 任意の M の元 x に対し $(A_x, B_x), (A'_x, B'_x)$ は M の切断となる.□

切断の集合を定義する.$S' := \{(A, B) \in P(M)^2 | (A, B)$ は M の切断 $\}$ とし,$S := S' - \{(A_x, B_x) \in P(M)^2 | x \in M\}$ とする.S の元 $(A, B), (A', B')$ に対し $(A, B) = (A', B')$ とは $A = A'$ のこととし, さらに $(A, B) \leqq (A', B')$ とは $A \subseteqq A'$ のこととして S に順序を導入する. これが順序についての 3 条件を満たすのは自明だろう.

定理 3.3 順序集合 S は全順序.□

今, 任意に $(A, B) \in S$ をとる.$A \neq \emptyset$ より $a \in A$ がとれる. すると,M に最小元が存在しないので $b < a$ なる $b \in M$ がとれる. すると

$$x < b \Rightarrow x < a \Rightarrow x \in A (\because \text{定義 } 3.1 \text{ の } 3.)$$

$$\therefore A'_b \subseteqq A \Leftrightarrow (A'_b, B'_b) \leqq (A, B)$$

よって S の各元に対し, それよりも小さな S の元がとれるので S には最小元が存在しない. 同様にして S には最大元も存在しない. 即ち, 最大元, 最小元の定義により

$$\forall x \in S, \exists y, z \in S, y < x < z$$

このことは以後よく黙って用いる.

4 $M \subseteqq S$

定理 4.1 以下の写像は順序単射 □

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & S \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & (A'_x, B'_x) \end{array}$$

定理 4.1 の順序単射により順序が保存されるので,M の元 x と S の元 (A'_x, B'_x) を同一視することによって $M \subseteqq S$ とすることが出来る.

5 S の切断

定義 5.1（S の切断） S の部分集合 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対し,$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ が S の切断とは,

1. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \neq \emptyset$
2. $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B} = S$
3. $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A < B$

が成り立つことをいう.□

定理 5.2　$(\mathcal{A},\mathcal{B})$ が S の切断のとき,$\mathcal{A}$ の最大元,$\mathcal{B}$ の最小元のうち, 一方のみが存在する.□

証明

$$A := \{x \in M | (A'_x, B'_x) \in \mathcal{A}\}, B := \{x \in M | (A'_x, B'_x) \in \mathcal{B}\}$$

とおく.(A,B) が M の切断であることを示す. それには定義 3.1 の 3 条件を満たすことを示せばよい.

1. $B = \emptyset$ のとき, 定義 5.1 の 2. より,$\forall x \in M, (A'_x, B'_x) \in \mathcal{A}$. ここで,$\exists (A', B') \in S, \forall x \in M, (A', B') > (A'_x, B'_x)$ と仮定すると, 任意の $x \in M$ に対し

$$(A', B') > (A'_x, B'_x) \Leftrightarrow A' \supsetneqq A'_x \Leftrightarrow B' \subsetneqq B'_x$$

なので

$$\emptyset \neq B' \subseteqq \bigcap_{x \in M} B'_x = \{y \in M | \forall x \in M, y \geqq x\} = \emptyset (\because M \text{ に最小元は存在しない})$$

より矛盾.
よって, 任意の $C \in S$ に対し $(\exists x \in M, C \leqq (A'_x, B'_x))$ $\therefore C \in \mathcal{A} (\because (A'_x, B'_x) \in \mathcal{A}$, 定義 5.1 の 3.) なので $\mathcal{B} = \emptyset$, これは定義 5.1 の 2. に矛盾.$\therefore B \neq \emptyset$, 同様に $A \neq \emptyset$.
2. A, B の定義により,$A \sqcup B = M$
3. $a \in A, b \in B$ に対し $a < b$(昨年の記事参照).

よって,(A,B) は M の切断である. あとは昨年の記事参照.■

系 5.3　順序集合 S の上に有界な部分集合には上限が, 下に有界な部分集合には下限が存在する.□

証明　上限について考える.$\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteqq S$ で,$\mathcal{A}$ は上に有界とする.$\mathcal{B} := \{x \in S | \forall a \in \mathcal{A}, x \geqq a\}$ とする. このとき,$(\mathcal{B}^c, \mathcal{B})$ が S の切断となることを示す. それには定義 5.1 の 3 条件を満たすことを示せばよい.

1. $\mathcal{A}$ は上に有界より $\mathcal{B} \neq \emptyset$. また,

$$\mathcal{B}^c = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{B} = S$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in S, \forall a \in \mathcal{A}, x \geqq a$$

$$\Leftrightarrow \forall a \in \mathcal{A}, a = \min S \Leftrightarrow \mathcal{A} = \emptyset (\because S \text{ に最小元は存在しない})$$

これは仮定に矛盾.$\therefore \mathcal{B}^c \neq \emptyset$
2. $\mathcal{B}^c \sqcup \mathcal{B} = S$ は自明.
3. $a \in \mathcal{B}^c, b \in \mathcal{B}$ とおくと,$a < b$(昨年の記事参照).

よって,$(\mathcal{B}^c, \mathcal{B})$ は S の切断である.
$\max \mathcal{B}^c$ が存在すると仮定すると矛盾 (昨年の記事参照). よって定理 5.2 より $\min \mathcal{B}$ すなわち $\mathcal{A}$ の上限が存在する.
下限についても同様にして示される.■

系 5.3 によって,S に ∞(S の全ての元より大きなもの),$-\infty$(S の全ての元より小さなもの) を付け加えることにより,S は完備束となる.

6　位相の導入のための準備

4 章の順序単射により,$M \subseteqq S$ とし,$a \in M$ に対し $a = (A'_a, B'_a)$ として考える.

こうして得られた S に位相を導入したい. 以下 $a, b \in S$ に対し $(a,b) := \{x \in S | a < x < b\}, [a,b] := \{x \in S | a \leqq x \leqq b\}$ などとし, 前者を開区間, 後者を閉区間と呼ぶ (共に $a > b$ のとき等は空集合として考える.).$(a,\infty) := \{x \in S | x > a\}, (-\infty, a) := \{x \in S | x < a\}, (-\infty,\infty) := S, (\infty, -\infty) := \emptyset, [a,\infty) := \{x \in S | x \geqq a\}$ などとする. また,$a \in S$ に対し $a < \infty, a > -\infty$ は恒等的になりたつものとする.

補題 6.1

$$\forall a, b \in S, \exists c \in M, a < b \Rightarrow a < c < b \quad \square$$

証明　ある $a, b \in S (a < b)$ に対し $\forall c \in M, (c \leqq a \vee b \leqq c)$ と仮定する.$a = (A, B), b = (A', B')$ とおく.$a < b \Leftrightarrow A \subsetneqq A'$ である.

今, 任意の $a' \in A'$ に対し $A'_{a'} \subsetneqq A' (\because A'_{a'}$ の定義, $a' \notin A'_{a'}) \Leftrightarrow a' < b.a' \in M$ であり, 背理法の仮定より

$$a' \leqq a \tag{2}$$

である. また任意の $b' \in B$ に対し $A'_b \supseteqq A \Leftrightarrow b' \geqq a$. ここで $a \in A'$ と仮定すると,$a \in M$ で, 任意の a 以下の M の元は A' に含まれるが, これと (2) より $A' = A_a \Rightarrow S \ni b = (A', B') = (A_a, B_a) \notin S$ となり矛盾. よって $a \notin A'$ となる. これと (2) より任意の $a' \in A'$ について

$$a' < a \tag{3}$$

である.

ここで,$A \subsetneqq A' \Rightarrow A' - A \neq \emptyset$ より $c \in A' - A$ をとれる. このとき $c \in M$ である.$c \in A'$ なので (3) より $(A'_c, B'_c) = c < a = (A, B) \Rightarrow A'_c \subsetneqq A.c \notin A \Leftrightarrow c \in B$ なので $A \subseteqq A'_c$. すると $A'_c \subsetneqq A \subseteqq A'_c$ より矛盾. よって示された.■

7　1 つ目の位相の導入

$\mathfrak{O}$ を,$(a,b)(a, b \in S)$ の形の集合, 即ち開区間の全体で生成される位相とする (開区間の共通部分はまた開区間であるので, 結局開区間全体の集合はこの位相の基底をなす.). たとえば S に最大元は存在しないので $(a,\infty) = \bigcup_{b>a} (a,b) \in \mathfrak{O}$. 同様に $(-\infty, a) \in \mathfrak{O}$. このときの閉集合系を $\mathfrak{A}$,$M (\subseteqq S)$ の開核, 閉包をそれぞれ M^i, M^a とかく. 以後この位相空間の性質について考えるが, これは $\mathbb{R}$ での通常の位相に類似した様々な性質を持つ.

定理 7.1　$\{(a,b) \in P(S) | a, b \in M\}$ は $\mathfrak{O}$ の基底をなす.□

証明　$O \in \mathfrak{O}, x \in O$ とする.$O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda, b_\lambda)(a_\lambda, b_\lambda \in S)$ とおけ ($\because$ 開区間の全体は $\mathfrak{O}$ の基底), あとは昨年の記事参照.■

系 7.2　M が高々可算であれば $(S, \mathfrak{O})$ は第二可算公理を満たす.□

8 正則性

定理 8.1 $(S, \mathfrak{O})$ は正則である □

証明 $(T_1), (T_3)$ を満たすことを示せばよい.

まず,$a \in S$ に対し $\{a\} = ((a, \infty) \cup (-\infty, a))^c \in \mathfrak{A}$ より (T_1) を満たす.

次に,(T_3) を満たすことを示す.$O \in \mathfrak{O}, x \in O$ とおく.$\exists O' \in \mathfrak{O}, x \in O' \subseteqq O'^a \subseteqq O$ を示せばよい.

定理 7.1 により, ある $(a,b)(a,b \in M, a < b)$ に対し $x \in (a,b) \subseteqq O$ となる. このとき,$a < x < b$ であるので, 補題 6.1 によりある $a', b' \in M$ に対し $a < a' < x < b' < b$ となる. すると

$$x \in (a', b') \subseteqq (a', b')^a \subseteqq [a', b'](\because (a', b') \subseteqq [a', b'] = ((-\infty, a') \cup (b', \infty))^c \in \mathfrak{A}) \subseteqq (a,b) \subseteqq O$$

となるので $O' = (a', b')$ とすればよい.■

系 8.2 M が高々可算であれば,$(S, \mathfrak{O})$ は

1. 正規である.
2. 距離づけ可能である.□

9 局所コンパクト性

定理 9.1 $a \leqq b$ なる任意の $a, b \in S$ に対し,$[a,b]$ はコンパクト.□

証明 $\mathfrak{U}$ を $[a,b]$ の任意の開被覆とする.$I := \{x \in [a,b] | [a,x]$ を $\mathfrak{U}$ の有限個の元で覆える $\}$ とする.$b \in I$ を示せばよい.

まず $a \in [a,b] \subseteqq \cup\mathfrak{U}$ よりある $U \in \mathfrak{U}$ に対し $[a,a] = a \in U$ なので $a \in I$. よって $I \neq \emptyset$. これと I に上界 (b) が存在することより $\sup I =: c$ が存在し,$c \leqq b$. また, 定理 7.1 よりある $(d,e)(d,e \in M)$ が存在し $a \in (d,e) \subseteqq U$ で, このとき $a < e$. 従って, 補題 6.1 によりある $f \in M$ に対し $a < f < e$ である. すると $[a,f] \subseteqq (d,e) \subseteqq U$ なので $f \in I$ で $a < f$ なので $a < f \leqq \sup I = c$ となり, 結局

$$a < c \leqq b \tag{4}$$

とわかる.

今,$c \in [a,b] \subseteqq \bigcup \mathfrak{U}$ よりある $U' \in \mathfrak{U}$ に対し $c \in U'$. 定理 7.1 よりある $(s', t')(s', t' \in M)$ に対し $c \in (s', t') \subseteqq U'$. あとは昨年の記事参照.■

系 9.2 $(S, \mathfrak{O})$ は局所コンパクト.□

10 M の稠密性

命題 10.1

$$M^a = S\square$$

証明　$M^{ac} \neq \emptyset$ と仮定すると,$x \in M^{ac}$ がとれる.M^a は閉集合より M^{ac} は開集合で, 定理 7.1 により $x \in (a,b) \subsetneqq M^{ac}$ なる $a, b(a, b \in M, a < b)$ がとれる. すると補題 6.1 により $a < a' < x$ なる $a' \in M$ がとれる. このとき $a' \in (a,b) \subsetneqq M^{ac}$ だが $a' \in M \subsetneqq M^a$ より矛盾.$\therefore M^{ac} = \emptyset \Leftrightarrow M^a = S$

■

系 10.2　M が高々可算なら $(S, \mathfrak{O})$ は可分 □

11　連結性

補題 11.1　$A \in \mathfrak{A}$ とする.

1. $(\forall x < a, x < \exists a' \leqq a, a' \in A) \Rightarrow a \in A$
2. $(\forall x > a, a \leqq \exists a' < x, a' \in A) \Rightarrow a \in A$□

証明　2. は 1. と同様に示されるので 1. のみ示す.

対偶をとることにより,$a \in A^c \Rightarrow \exists x < a, x < \forall a' \leqq a, a' \in A^c$ を示せばよい.

$A \in \mathfrak{A}$ なので $A^c \in \mathfrak{O}$ であり $a \in A^c$ のとき定理 7.1 より $a \in (m,n) \subsetneqq A^c$ なる $m, n \in M$ がとれる. このとき $m < a$ で, 補題 6.1 より $m < m' < a$ なる $m'(\in M)$ がとれる*1. すると $m' < \forall a' \leqq a, m < m' < a' \leqq a < n \Rightarrow a' \in (m,n) \subsetneqq A^c$ よりよい.■

定理 11.2　位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ は連結 □

証明　$A_1, A_2 \in \mathfrak{A} - \{\emptyset\}$ とする.$A_1 \sqcup A_2 = S$ と仮定する.

$A_1, A_2 \neq \emptyset$ より $a_i \in A_i (i = 1, 2)$ がとれる. 対称性より $a_1 < a_2$ としてよい.$B := A_1 \cap (-\infty, a_2)$ とおくと,$a_1 \in B$ なので $B \neq \emptyset$. また B の定義より a_2 は B の上界なので系 5.3 より $\sup B$ が存在し,

$$\sup B \leqq a_2 \tag{5}$$

今, 上限の定義より $\forall x < \sup B, \exists a > x, a \in B \Rightarrow a \in A_1, a \leqq \sup B$. すると補題 11.1 の 1. より $\sup B \in A_1$.

よって $\sup B \in A_1$. これと (5) より $\sup B < a_2 (\because a_2 \in A_2)$.

また,$\sup B < \forall x < a_2, x \in A_2 (\because x < a_2 \Rightarrow x \in (-\infty, a_2) - B = (-\infty, a_2) - A_1)$ より $\forall x > \sup B, \sup B \leqq \exists a < x, a \in A_2$*2. よって補題 11.1 の 2. より $\sup B \in A_2$.

すると $\sup B \in A_1, A_2 \therefore A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ より矛盾. よって示された.■

定理 11.3

$$card\ M \leqq \aleph_0 \Rightarrow card\ M = \aleph_0, card\ S = \aleph□$$

証明　M は高々可算なので系 8.2 より位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ は距離付け可能なので S 上の距離関数 d が位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ を距離づけるとおける.$a \in S$ を任意にとる. 写像 f を以下で定義する.

---

*1 $m = -\infty$ の場合のためにこのような m' をとった.

*2 補題 6.1 より $\sup B \leqq y < x$ なる $y \in S$ の存在は保証されている.

$$\begin{array}{cccc} f: & S & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \Psi & & \Psi \\ & x & \longmapsto & d(x,a) \end{array}$$

ここで S には最大元が存在しないので $b > a$ なる $b \in S$ がとれる. すると,

$$\forall x \in S, \forall \epsilon > 0, \forall y \in S, d(x,y) < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |d(x,a) - d(y,a)| \leqq d(x,y) < \epsilon$$

より f は実連続関数. また定理 11.2 より $(S, \mathfrak{O})$ は連結.$f(b) > 0(\because a \neq b)$ に注意して中間値の定理より

$$0 = f(a) < \forall y < f(b), \exists x \in S, f(x) = y$$

$$\therefore f(S) \supseteqq [0, f(b)]$$

$$\therefore \aleph = card\ [0, f(b)] \leqq card\ f(S) \leqq card\ S \leqq card\ P(M)(\because S \text{ の定義})$$

$$\leqq 2^{\aleph_0} = \aleph$$

$$\therefore card\ S = card\ P(M) = \aleph$$

すると $card\ M < \aleph_0$ と仮定すると $\sharp M < \infty \Rightarrow \sharp P(M) < \infty$ より矛盾. よって $card\ M = \aleph_0$

■

ここで, 定理 11.3 における $card\ M = \aleph_0$ の部分は以下のように自明に示される.

証明　以下のようにして M の点列 $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ を帰納的に定義する.

$x_0 \in M$ を任意にとる.$x_k(k \in \mathbb{N}_0)$ が定義されているとき,M に最大元が存在しないことから $x_{k+1} > x_k$ なる $x_{k+1} \in M$ がとれる.

すると,$\aleph_0 = card\ \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \leqq card\ M \leqq \aleph_0 \therefore card\ M = \aleph_0$

■

12　2 つ目の位相の導入

次に導入するのは $\mathbb{R}$ での下極限位相にあたるものである.$\mathfrak{O}'$ を,$[a,b)(a,b \in S)$ の形の集合で生成される位相とする (この形の集合の共通部分はまたこの形であるので,$[a,b)(a,b \in S)$ の形の集合の全体は基底をなす. このことはよく黙って用いる.). たとえば S に最大元が存在しないので $[a,\infty) = \bigcup_{b>a}[a,b) \in \mathfrak{O}'$ である. この時の閉集合系を $\mathfrak{A}'$,$M(\subsetneqq S)$ の開核, 閉包をそれぞれ $M^{i'}, M^{a'}$ とかく. 以後この位相空間の性質を考えるが, これは $\mathbb{R}$ における下極限位相に類似した様々な性質を持つ.

ここで,1 つ目の位相と違い,$\{[a,b) \in P(S) | a,b \in M\}$ は $\mathfrak{O}'$ の基底をなすとは限らない.

実際,$x \in S - M$ を (可能なら) とると,$x \in [x,\infty), [x,\infty) \in \mathfrak{O}'$ だが,$x \in [a,b) \subsetneqq [x,\infty)(a,b \in M)$ のとき,$a = x \notin M$ より矛盾. よって $x \in [a,b) \subsetneqq [x,\infty)(a,b \in M)$ なる $[a,b)$ は存在せず,$S - M \neq \emptyset$ のとき $\{[a,b) \in P(S) | a,b \in M\}$ は $\mathfrak{O}'$ の基底をなさない.

命題 12.1　1. $(a,b) \in \mathfrak{O}'(a,b \in S)$

2. $\mathfrak{O} \subseteqq \mathfrak{O}'$□

証明 1.

$$(a,b) = \bigcup_{x>a}[x,b) \in \mathfrak{O}'$$

2. 各 $O \in \mathfrak{O}$ は定理 7.1 より $O = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda, b_\lambda)(a_\lambda, b_\lambda \in M)$ と書け,1. より $(a_\lambda, b_\lambda) \in \mathfrak{O}'$ なので $O = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda, b_\lambda) \in \mathfrak{O}'$

■

さらに, 位相空間 $(S, \mathfrak{O}')$ は非連結である. 実際,$a, b \in S(a < b)$ に対し命題 12.1 により

$$\mathfrak{O}' \ni [a,b) = ((-\infty,a) \cup [b,\infty))^c \in \mathfrak{A}'$$

で,$[a,b) \neq \emptyset$ なので非連結である.

13 正規性

定理 13.1 $(S, \mathfrak{O}')$ は正規である.□

証明 $(T_1), (T_4)$ を満たすことを示せばよい.

まず, 命題 12.1 により $a \in S$ に対し $\{a\} = ((-\infty,a) \cup (a,\infty))^c \in \mathfrak{A}'$ であり,(T_1) を満たす.

次に (T_4) を満たすことを示す.$A, B \in \mathfrak{A}'(A \cap B = \emptyset)$ とおく. このとき任意の $x \in A$ に対し $x \in B^c$ であり,$B^c \in \mathfrak{O}'$ よりある $[a_x, b_x)(a_x, b_x \in S)$ が存在し $x \in [a_x, b_x) \subseteqq B^c$ とおける. 同様に,$y \in B$ に対しある $[a'_y, b'_y)(a'_y, b'_y \in S)$ が存在し $x \in [a'_y, b'_y) \subseteqq A^c$ とおける.

今,$O := \bigcup\limits_{x\in A}[x, b_x), O' := \bigcup\limits_{y\in B}[y, b'_y)$ とおくと

$$\forall x \in A, x \in [x, b_x) \subseteqq O \therefore A \subseteqq O$$

同様に $B \subseteqq O'$. また

$$\forall x \in A, [x, b_x) \in \mathfrak{O}' \therefore O = \bigcup_{x\in A}[x, b_x) \in \mathfrak{O}'$$

同様に $O' \in \mathfrak{O}'$. さらに $O \cap O' \neq \emptyset$ と仮定すると, ある $x \in A, y \in B$ に対し $[x, b_x) \cap [y, b'_y) \neq \emptyset$. 対称性より $x \leqq y$ としてよい.$c \in [x, b_x) \cap [y, b'_y)$ とおくと $x \leqq y \leqq c < b_x \Rightarrow B \ni y \in [x, b_x) \subseteqq [a_x, b_x) \subseteqq B^c$ より矛盾. よって $O \cap O' = \emptyset$.

よって (T_4) も満たすので示された.■

14 可算公理

命題 14.1 $x \in S$ に対し $\{[x,y) \in P(S) | y > x, y \in M\}$ は x の基本近傍系をなす.□

証明 $\{[x,y) \in P(S) | y > x, y \in M\}$ の各元は x を含む開集合なので x の近傍.

V を x の近傍とすると $x \in V^{i'}, V^{i'} \in \mathfrak{O}'$ なのである $[a,b)(a,b \in S, a < b)$ に対し $x \in [a,b) \subsetneqq V^{i'}$. この時 $x < b$ なので補題 6.1 よりある $b' \in M$ に対し $x < b' < b$. よって $[x,b') \subsetneqq [a,b) \subsetneqq V^{i'} \subsetneqq V$ なので示された.■

系 14.2　M が高々可算ならば $(S, \mathfrak{O}')$ は第一可算公理を満たす.□

定理 14.3　$(S, \mathfrak{O}')$ の基底の濃度は $card\ S$ 以上.□

証明　$\mathfrak{U}$ が位相空間 $(S, \mathfrak{O}')$ の基底のとき,$[x,y)$ の形の集合は開集合より

$$\forall x, y \in S, \exists U \in \mathfrak{U}, x < y \Rightarrow x \in U \subsetneqq [x,y) \Rightarrow \min U = x$$

すると各 $x \in S$ に対し $\min U = x$ なる $U \in \mathfrak{U}$ がとれる. よって,

$$card\ \mathfrak{U} \geqq card\ S$$

■

系 14.4　位相空間 $(S, \mathfrak{O}')$ は $card\ S \geqq \aleph$ なら第二可算公理を満たさない.□

15　M の稠密性

命題 15.1

$$M^{a'} = S\square$$

証明　$M^{a'c} \neq \emptyset$ と仮定すると,$x \in M^{a'c}$ がとれる.$M^{a'} \in \mathfrak{A}'$ より $M^{a'c} \in \mathfrak{O}'$ なので,$x \in [a,b) \subsetneqq M^{a'c}$ なる $a, b(a, b \in S, a < b)$ がとれる.

今, 補題 6.1 より $a < c < b$ なる $c \in M$ がとれる. このとき $c \in [a,b) \subsetneqq M^{a'c}$ だが $c \in M \subsetneqq M^{a'}$ より矛盾.

よって $M^{a'c} = \emptyset \Leftrightarrow M^{a'} = S$

■

系 15.2　M が高々可算ならば $(S, \mathfrak{O}')$ は可分.□

系 15.3　M が高々可算ならば $(S, \mathfrak{O}')$ は距離付け不可能.□

証明　$(S, \mathfrak{O}')$ が距離付け可能と仮定する. このとき系 14.2 より $(S, \mathfrak{O}')$ は第一可算公理を満たす. これと系 15.2 から $(S, \mathfrak{O}')$ が可分であることより $(S, \mathfrak{O}')$ は第二可算公理を満たす. しかし, 定理 11.3 により $card\ S = \aleph$ なので, 系 14.4 により第二可算公理を満たさないので矛盾. よって示された.■

16　コンパクトな部分集合

定理 16.1　A を位相空間 $(S, \mathfrak{O}')$ のコンパクトな部分集合とするとき $card\ A \leqq card\ M\square$

証明　A はコンパクトなので任意の $a \in A$ に対し

$$A \subsetneqq \bigcup_{x<a} (-\infty, b) \cup [a, \infty)$$

$$\Rightarrow \exists x_1 < x_2 < \ldots < x_n < a, A \subseteqq \bigcup_{k=1}^{n} (-\infty, x_k) \cup [a, \infty) = (-\infty, x_n) \cup [a, \infty)$$

この x_n を x_a とすることにより $\forall a \in A, \exists x_a < a, \forall y \in [x_a, a), y \notin A$ となる. 各 $a \in A$ に対し補題 6.1 より $a' \in [x_a, a)$ なる $a' \in M$ がとれる. 選択公理より写像 $\Phi : A \longrightarrow M(x_a < \Phi(a) < a)$ がとれる.Φ が単射であることを示す.A の元 $a, b(a \neq b)$ をとる. 対称性より $a < b$ としてよい.$a \in A$ なので x_b の定義より $a \notin [x_b, b)$. これと $a < b$ より $a < x_b$. すると,$[x_a, a) \cap [x_b, b) = \emptyset$.$\Phi(a) \in [x_a, a), \Phi(b) \in [x_b, b)$ なので $\Phi(a) \neq \Phi(b)$ となり示された.

よって A から M への単射が存在するので $card\ A \leqq card\ M$

■

17　おわりに

3〜5 章の操作を $M = \mathbb{Q}$ として行うと $S = \mathbb{R}$ が得られ (というよりこのことによって $\mathbb{R}$ が定義されます), それに $\mathbb{R}$ の体としての性質や収束などの概念を用いると実解析になっていきます (系 5.3 は実解析の一つの鍵となる定理です.). また前述のとおり 7〜11 章の位相は $\mathbb{R}$ では通常の位相,12〜16 章の位相は $\mathbb{R}$ では下極限位相と呼ばれるものです.

今回は春休み中はかなり忙しく, 色々考えてはみましたが, 去年とほぼ同じ内容を載せる不甲斐無い結果となってしまいました. それでも, 去年の部誌で言及した下極限位相の拡張について触れることが出来たのが不幸中の幸いかと思っております.

誤植を訂正する為に書いたこの文章にも必ず誤植があるでしょうが, 大したことがなければお許しください. また, 選択公理についてはすべてのところで省略してしまいました. すみませんでした.

最後に, ここまで拙い記事をお読みいただきありがとうございました.

18　参考文献

松坂和夫著『集合・位相入門』(岩波書店)

また, 本校教諭である杉山先生からいただいた実解析のプリントが参考になりました.